А. И. Козко В. Г. Чирский

Задачи с параметром и другие сложные задачи

Москва
Издательство МЦНМО
2007

УДК 512
ББК 22.141
К59

Козко А. И., Чирский В. Г.
К59 Задачи с параметром и другие сложные задачи. — М.: МЦНМО, 2007. — 296 с.

ISBN 978-5-94057-270-1

Книга посвящена решению задач с параметрами. Помимо стандартных сведений в ней приведены оригинальные методы и приемы решения различных сложных задач. Кроме того, в книге рассмотрены задачи, связанные с методом математической индукции, и задачи по стереометрии. Большинство разбираемых авторами задач взято из вариантов вступительных экзаменов в МГУ.

Во второй части книги приведены варианты вступительных экзаменов 2003—2006 гг.

Для учащихся старших классов, преподавателей математики и абитуриентов.

ББК 22.141

Козко Артем Иванович, Чирский Владимир Григорьевич

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ И ДРУГИЕ СЛОЖНЫЕ ЗАДАЧИ

Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Печ. л. 18,5. Тираж 3000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы»

ISBN 978-5-94057-270-1

Оглавление

Введение

Книга посвящена решению задач с параметрами, а также различных задач, связанных с методом математической индукции, и задач по стереометрии — теме, которой боятся многие абитуриенты. Умение решать такие задачи считается признаком отличного знания математики. Некоторые при подготовке к экзаменам боятся даже браться за эти задачи, думая, что у них всё равно ничего не получится. Вместе с тем часто для решения задачи с параметром нужно просто использовать свой здравый смысл, и решение окажется простым и понятным!

Поясним сказанное примером и решим «трудную» задачу.

Найдите такие значения параметра $a < 1$, *для которых решения неравенства* $x^2 - (a+1)x + a \leqslant 0$ *образуют отрезок, длина которого больше* 3.

Что же делать? Как упоминалось выше, использовать здравый смысл! Если бы вместо переменного параметра a в задачу входило какое-то конкретное число, например число -4, то наше неравенство приняло бы вид $x^2+3x-4 \leqslant 0$. Такие-то неравенства мы решаем легко! Найдя корни многочлена $x^2 + 3x - 4 = 0$, а это будут числа $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, преобразуем наше неравенство к виду $(x + 4)(x - 1) \leqslant 0$. Для его решения применим известный метод интервалов и получим $x \in [-4; 1]$. Длина этого отрезка равна 5, следовательно, число -4 удовлетворяет условию задачи. Так давайте поступать по той же схеме и в общем случае, с переменным параметром. Найдём корни многочлена $x^2 - (a+1)x + a$. Решим для этого уравнение $x^2 - (a+1)x + a = 0$. Его дискриминант равен $(a + 1)^2 - 4a = (a^2 + 2a + 1) - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$, поэтому корнями будут числа $x_{1,2} = \frac{(a+1)\pm(a-1)}{2}$, т. е. числа $x_1 = a$, $x_2 = 1$, откуда следует, что исходное неравенство можно переписать в виде $(x - a)(x - 1) \leqslant 0$. По условию задачи $a < 1$, значит, вновь используя метод интервалов, мы находим, что решением этого неравенства является отрезок $[a; 1]$. Длина отрезка равна числу $1 - a$, и условие задачи выполняется, если $1 - a > 3$, т. е. $a < -2$.

Ну что же, это не совсем простое решение, но и не слишком-то сложное, доступное каждому!

Первая цель предлагаемой книги состоит как раз в том, чтобы помочь желающим научиться решать задачи с параметрами. И начинать следует именно с простых задач. Начало книги и начала большинства параграфов содержат достаточно простые задачи. Однако если Вы обратите внимание на названия факультетов и номера этих решённых простых задач, под которыми они стоят в вариантах, то поймёте, что многие из задач с параметрами, которые даются на вступительных экзаменах и которых Вы так опасались, вполне Вам по силам.

При решении задач с параметрами приходится всё время производить несложные, но последовательные рассуждения, составлять для себя логическую схему решаемой задачи. Поэтому такие задачи — незаменимое средство для тренировки логического мышления. Их решение позволяет намного лучше понять обычные, без параметров, задачи. А привычка к математическим рассуждениям очень полезна при изучении высшей математики и использовании полученных знаний впоследствии. Также будет полезным знакомство с методом математической индукции — основой доказательства теорем из высшей математики. Знание стереометрии, умение решать задачи развивает пространственное, образное мышление и также полезно для развития математических способностей обучающегося. Ведь математические методы приобретают всё большее значение в развитии и применении многих наук и технологий.

Применение метода интервалов предполагает автоматический учёт ОДЗ при расставлении точек на действительной оси. Условия, задающие ОДЗ, специально выписаны в тех задачах, где проверка этих условий является важной составной частью решения.

Не стоит думать, что книга посвящена только простым задачам. В ней рассмотрены многие оригинальные методы и приёмы решения весьма трудных задач. Достаточно взглянуть на перечень параграфов, чтобы убедиться в том, что книга содержит как часто используемые, так и малоизвестные способы решения задач. А изучаемый материал подобран так, чтобы проиллюстрировать преимущества того или иного способа.

В книге много задач и упражнений. Многие задачи составлены авторами. Большинство задач взято из вступительных экзаменов в МГУ.

Обозначения вида

(факультет почвоведения (май), 2002, № 6(7))

означают, что задача предлагалась на майской олимпиаде МГУ (дающей право поступления на факультет почвоведения) в 2002 году в качестве шестой задачи в варианте из семи задач. **ЕГЭ (демо)** обозначает, что задача взята из предварительного демонстрационного варианта единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Одним словом, основной целью авторов было написание книги, которая поможет при подготовке к поступлению в большинство высших учебных заведений, поскольку содержит задачи всех уровней, от простых до самых трудных. Она даёт разные методы решения этих задач, рассчитанные на самый различный уровень подготовки читателя.

Вновь подчеркнём, что основой для усвоения материала мы считаем здравый смысл читателя, а не только и не столько его предварительные знания. В жизни здравый смысл — надёжная опора, поэтому мы надеемся, что он поможет Вам и на вступительных испытаниях. Мы будем рады, если наша книга поможет Вам более уверенно использовать здравый смысл на всех видах испытаний по математике и выйти из них счастливым победителем!

Желаем Вам успеха!

Часть 1

Основные задачи и методы их решения

§1.1. Простейшие уравнения и неравенства с параметром

Цель данного параграфа состоит в том, чтобы на простейших примерах познакомить читателя с задачами с параметрами. Для решения данных задач ничего кроме здравого смысла не требуется. Если сразу не понятно, как решать задачу, мы советуем читателю вчитываться в неё до тех пор, пока не станет ясно условие.

В некоторых задачах для нахождения параметров достаточно просто подставлять в неравенство (уравнение или систему) точку: например, так решаются задачи 1, 2, 5 и следующий пример.

Пример 1 (ЕГЭ, 2003, № B4)**.** При каком наибольшем отрицательном значении a функция

$$y = \sin\left(24x + \frac{a\pi}{100}\right)$$

имеет максимум в точке $x_0 = \pi$?

Решение. Максимумы функции $\sin t$ достигаются в точках вида $\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, чтобы у исходной функции достигался максимум в точке $x_0 = \pi$, должно существовать такое число $n \in \mathbb{Z}$, что

$$24\pi + \frac{a\pi}{100} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a}{100} = \frac{1}{2} + 2m,\ m \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad a = 50 + 200m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Остаётся лишь выбрать среди чисел вида $a = 50 + 200m$, $m \in \mathbb{Z}$, наибольшее отрицательное. Это будет число -150, получающееся при $m = -1$, так как если $m \geqslant 0$, то $50 + 200m \geqslant 50$.

Ответ. $a = -150$.

Пример 2. При всех a решите неравенство

$$\frac{x-a}{x-a-1} \leqslant 0.$$

Решение. При любом фиксированном значении a это обычное рациональное неравенство. Поэтому к нему можно применить метод интервалов. Напомним, что для этого следует расположить на числовой оси числа a и $a+1$, в которых обращаются в нуль числитель и знаменатель соответственно. Ясно, что при всех a число $a+1$ больше чем a. Поэтому получаем такое расположение точек, как показано на рис. 1.1.

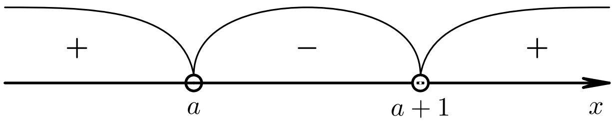

Рис. 1.1

Ответ. $x \in [a; a+1)$ при любом a.
Рассмотрим ещё один пример.

Пример 3. При всех a решите неравенство

$$\frac{x-1}{x-a} > 0.$$

Решение. Как и выше, будем применять метод интервалов. Однако здесь возникает небольшая трудность — мы не знаем, как расположены числа 1 и a. Ведь a может быть как меньше 1, так и больше или равно 1. Но это означает, что нам следует рассмотреть эти три случая.

I. Пусть $a < 1$. Тогда получаем такое расположение точек, как показано на рис. 1.2.

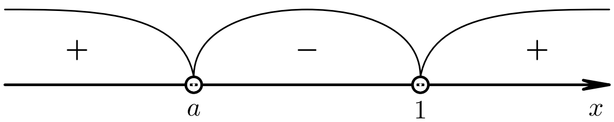

Рис. 1.2

Метод интервалов даёт часть ответа: если $a < 1$, то $x \in (-\infty; a) \cup$ $\cup\, (1; +\infty)$.

II. Пусть $a = 1$. Тогда получаем неравенство $\frac{x-1}{x-1} > 0$, при $x \neq 1$ равносильное верному неравенству $1 > 0$. Его решения — вся область определения неравенства, т. е. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

III. Пусть $a > 1$. Тогда точки расположены, как показано на рис. 1.3.

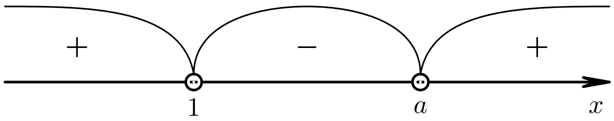

Рис. 1.3

Метод интервалов приводит к частичному ответу: если $a > 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (a; +\infty)$.

Объединим части ответов и получим окончательный результат.

Ответ. Если $a < 1$, то $x \in (-\infty; a) \cup (1; +\infty)$; если $a = 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; если $a > 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (a; +\infty)$.

Пример 4. При всех a решите неравенство

$$\frac{x}{x+a} > 1.$$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\frac{x}{x+a} - 1 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x-x-a}{x+a} > 0 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{-a}{x+a} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a}{x+a} < 0.$$

При $a > 0$ это неравенство равносильно неравенству $x + a < 0$, $x < -a$, и его решения — $x \in (-\infty; -a)$.

При $a = 0$ получаем неверное неравенство $\frac{0}{x} < 0$, $0 < 0$, у которого, разумеется, нет решений.

При $a < 0$ это неравенство равносильно такому: $x + a > 0$, или $x > -a$, имеющему решения $x \in (-a; +\infty)$.

Ответ. Если $a < 0$, то $x \in (-a; +\infty)$; если $a = 0$, то $x \in \varnothing$; если $a > 0$, то $x \in (-\infty; -a)$.

Рассмотрим ещё один простой пример.

Пример 5. При всех a решите неравенство

$$\frac{a}{x+a} > 1.$$

Решение. Преобразуем это неравенство:

$$\frac{a}{x+a} - 1 > 0 \iff \frac{a-x-a}{x+a} > 0 \iff$$
$$\iff \frac{-x}{x+a} > 0 \iff \frac{x}{x+a} < 0.$$

Решение вполне аналогично решению примера 3. Именно, расположим на оси точки $-a$ и 0. Возможны 3 случая.

I. Пусть $a > 0$, тогда $-a < 0$ и точки располагаются, как показано на рис. 1.4. Мы получаем решение $x \in (-a; 0)$.

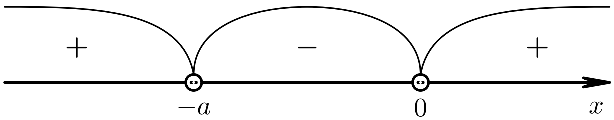

Рис. 1.4

II. Пусть $a = 0$, тогда мы получаем $\frac{x}{x} < 0$, или $1 < 0$ при $x \neq 0$. Это неравенство не имеет решений.

III. Наконец, если $a < 0$, то число $-a > 0$ и точки располагаются, как показано на рис. 1.5. Отсюда следует, что $x \in (0; -a)$.

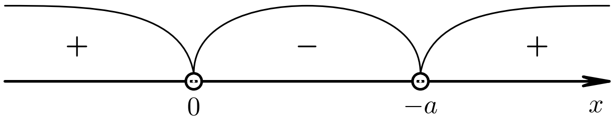

Рис. 1.5

Объединяя части ответа, получаем окончательный результат.

Ответ. Если $a < 0$, то $x \in (0; -a)$; если $a = 0$, то $x \in \varnothing$; если $a > 0$, то $x \in (-a; 0)$.

Пример 6. При всех a решите неравенство

$$\frac{(x-1)(x-a)}{x - \frac{a+1}{2}} > 0.$$

Решение. Заметим, что при любом фиксированном значении a это обычное рациональное неравенство, для решения которого применим метод интервалов. Однако при попытке непосредственного использования этого метода мы сталкиваемся с трудностью, состоящей в том, что нам неизвестно, как располагаются точки 1, a, $(a+1)/2$ на оси.

Как обойти трудность такого сорта? Рассмотрим возможные различные случаи. Для этого попарно сравним числа 1 и a, 1 и $(a+1)/2$, a и $(a+1)/2$. Находим

$$\begin{array}{lcr} a \vee 1, & (a+1)/2 \vee 1, & a \vee (a+1)/2, \\ a \vee 1, & a+1 \vee 2, & 2a \vee a+1, \\ a \vee 1, & a \vee 1, & a \vee 1. \end{array}$$

Откуда получаем, что при $a < 1$ выполнено двойное неравенство

$$a < \frac{a+1}{2} < 1,$$

при $a = 1$ получаем, что все числа 1, a и $(a+1)/2$ равны. При $a > 1$ выполнено двойное неравенство

$$1 < \frac{a+1}{2} < a.$$

Следовательно, разберём три случая.

I. Пусть $a < 1$. Тогда $1 > (a+1)/2 > a$. Применим метод интервалов (см. рис. 1.6). Получаем *частичный ответ*: если $a < 1$, то $x \in (a; (a+1)/2) \cup (1; +\infty)$.

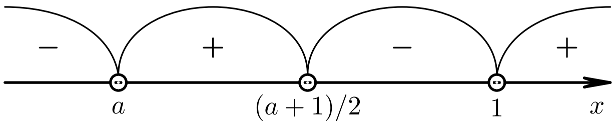

Рис. 1.6

II. Пусть $a = 1$. Тогда $a = (a+1)/2 = 1$. Применим метод интервалов (см. рис. 1.7). Получаем *частичный ответ*: если $a = 1$, то $x \in (1; +\infty)$.

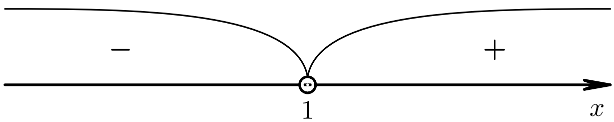

Рис. 1.7

III. Пусть $a > 1$. Тогда $a > (a+1)/2 > 1$. Применим метод интервалов (см. рис. 1.8). Получаем *частичный ответ*: если $a < 1$, то $x \in (1; (a+1)/2) \cup (a; +\infty)$.

Ответ. Если $a < 1$, то $x \in (a; (a+1)/2) \cup (1; +\infty)$; если $a = 1$, то $x \in (1; +\infty)$; если $a < 1$, то $x \in (1; (a+1)/2) \cup (a; +\infty)$.

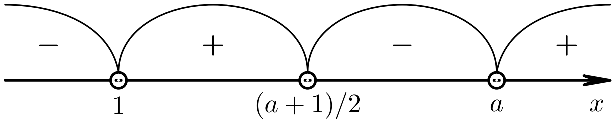

Рис. 1.8

Пример 7 (физический факультет (июль), 1997, № 7)**.** Для любых значений a решите неравенство

$$(a+4)\sqrt{5-x} > a+3.$$

Решение. Найдём область допустимых значений (ОДЗ): $5-x \geqslant 0$. Следующий шаг — преобразование неравенства. Нам будет удобно разделить обе части на число $a+4$. Но при этом возможны случаи $a+4<0$, $a+4>0$ и $a+4=0$.

I. Пусть $a+4=0$, тогда

$$0\cdot\sqrt{5-x} > -1 \quad\Longleftrightarrow\quad 0 > -1.$$

Последнее неравенство справедливо во всей ОДЗ. Получаем *частичный ответ*: если $a=-4$, то $x \leqslant 5$.

II. Пусть $a+4<0$, тогда исходное неравенство равносильно следующему:

$$\sqrt{5-x} < \frac{a+3}{a+4}.$$

Поскольку $\frac{a+3}{a+4} > 0$ при $a < -4$ (см. рис. 1.9), мы получаем

$$\sqrt{5-x} < \frac{a+3}{a+4} \quad\Longleftrightarrow\quad 5-x < \left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2 \quad\Longleftrightarrow\quad 5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2 < x.$$

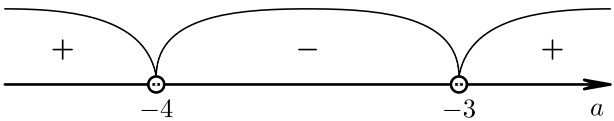

Рис. 1.9

С учётом ОДЗ получаем *частичный ответ*: если $a < -4$, то

$$x \in \left(5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2; 5\right].$$

III. Пусть $a+4>0$, тогда исходное неравенство равносильно следующему:

$$\sqrt{5-x} > \frac{a+3}{a+4}.$$

Поскольку выражение $(a+3)/(a+4)$ (см. рис. 1.9) отрицательно при $a \in (-4;-3)$, равно нулю при $a=-3$ и положительно при $a>-3$, рассмотрим несколько случаев.

III a. Пусть $a \geqslant -3$. Тогда (см. рис. 1.9) $(a+3)/(a+4) \geqslant 0$ и, следовательно, можем преобразовать исходное неравенство:

$$\sqrt{5-x} > \frac{a+3}{a+4} \iff 5-x > \left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2 \iff 5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2 > x.$$

Все полученные значения входят в ОДЗ. Следовательно, получаем *частичный ответ*: если $a \geqslant -3$, то $x < 5 - \left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2$.

III b. Пусть $a \in (-4;-3)$. Тогда (см. рис. 1.9) $(a+3)/(a+4) < 0$ и, следовательно, неравенство $\sqrt{5-x} > (a+3)/(a+4)$ выполнено на всей области допустимых значений. Получаем *частичный ответ*: если $a \in (-4;-3)$, то $x \leqslant 5$.

Остаётся собрать все полученные результаты в ответ.

Ответ. Если $a<-4$, то $x \in \left(5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2;5\right]$; если $a \in [-4;-3)$, то $x \leqslant 5$; если $a \geqslant -3$, то $x < 5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2$.

Задача 1 (химический факультет (июль), 2003, № 1)**.** Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$\frac{a}{x-a} > 0$$

содержит точку $x=1$.

Задача 2 (ЕГЭ, 2003, № B4)**.** При каком наименьшем положительном значении b функция

$$y = \sin\left(20x + \frac{b\pi}{150}\right)$$

имеет минимум в точке $x_0 = \pi/2$?

Задача 3 (факультет ВМиК (июль), 2002, № 1)**.** При каких значениях параметра b уравнение

$$b^4x + b^2 + (2+\sqrt{2})b + 2\sqrt{2} = b^2(b+\sqrt{2}) + 4x$$

имеет бесконечно много корней?

Задача 4 (физический факультет (март), 1997, № 7). Найдите все значения a, при которых неравенство $\log_a(x^2+2) > 1$ выполняется для всех значений x.

Задача 5 (психологический факультет, 1994, № 2). Известно, что $x = 1$, $y = -1$ — одно из решений системы

$$\begin{cases} 2ax + by = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{1111\pi}{6}\right), \\ ax^2 + by^2 = 2. \end{cases}$$

Найдите все решения данной системы.

Задача 6 (химический факультет (май), 2003, № 1). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$ax^2 + (a+1)x + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

Задача 7 (факультет ВМиК (отделение бакалавров) (июль), 2003, № 4 (7)). При всех значениях параметра c решите уравнение

$$4^x + c \cdot 25^x = 3 \cdot 10^x.$$

Задача 8 (факультет почвоведения (июль), 1999, № 7). Для каждого значения параметра $b \leqslant 0$ решите неравенство (относительно x)

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \geqslant b.$$

Задача 9 (физический факультет (июль), 1999, № 7). Для любого допустимого значения a решите неравенство $\log_{2a}(\log_3 x^2) > 1$ и найдите, при каком значении a множество точек x, не являющихся решением неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6?

Задача 10 (факультет почвоведения (июль), 1997, № 6). Для каждого значения параметра c решите неравенство $\sqrt{c^2 - x^2} \geqslant 2 - c$.

Задача 11 (физический факультет (июль), 1997, № 7). Для любых значений a решите неравенство $a - 2 < (a-1)\sqrt{x+1}$.

Задача 12 (факультет почвоведения (июль), 2005, № 5 (6)). Для каких значений параметра p отношение суммы коэффициентов многочлена $(px^2 - 7)^{18}$ к его свободному члену минимально?

Задача 13 (физический факультет (май), 2003, № 7). Для каждого допустимого значения b решите неравенство

$$\sqrt{7+\log_b x^2}+(\log_b |x|)(1+2\log_x b)>0.$$

Задача 14 (филологический факультет (апрель), 2002, № 6). Для каждого значения параметра a решите уравнение $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$.

Задача 15 (физический факультет (июль), 2002, № 7). Для каждого значения a решите неравенство $\log_{1/9}(x^2-6x-a^2-5a+12)<-1$ и найдите, при каких значениях a множество точек x, не являющихся решениями этого неравенства, представляет собой отрезок числовой оси, длина которого меньше $2\sqrt{3}$.

Задача 16 («Покори Воробьёвы горы» (апрель)[1], 2006, № 6 (6)). При всех значениях параметра a решите уравнение

$$2^{\frac{ax+3}{x^2+3}}+2^{\frac{4x^2-ax+9}{x^2+3}}=10.$$

Задача 17 (географический факультет (май), 2000, № 2). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-6,5}(x^2+1)=\log_{a-6,5}\big((a-5)x\big)$$

имеет два различных решения.

Задача 18 (факультет почвоведения (июль), 2002, № 7). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x^3-1)(x^2-16)}{\lg(15a-x)-\lg(x-a)}=0$$

имеет единственное решение.

Задача 19 (физический факультет (июль), 2000, № 7). При каких значениях p уравнение

$$4(x-\sqrt{p\cdot 7^p})x+p+7(7^p-1)=0$$

имеет корни и каковы знаки корней при различных значениях p?

Задача 20 (физический факультет (март), 2000, № 7). При каких значениях b уравнение

$$25^x-(2b+5)5^{x-1/x}+10b\cdot 5^{-2/x}=0$$

имеет ровно два решения.

[1] Этот вариант писали на следующих факультетах: химическом, биологическом, географическом, почвоведения, наук о материалах и психологическом.

Задача 21 (ЕГЭ (демо), 2004, № С4)**.** Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$x(x-2) \leqslant (a+1)(|x-1|-1)$$

содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 1,7, и положительным знаменателем.

Задача 22 (геологический факультет (май), 2000, № 7)**.** Найдите все значения a, при которых каждое решение неравенства $x^2 + a \leqslant 0$ удовлетворяет неравенству $(x+2a)\sqrt{3-x} \leqslant 0$.

Задача 23 (химический факультет, 1987, № 5)**.** Найдите все значения параметра p, при каждом из которых множество решений неравенства $(p-x^2)(p+x-2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 1$.

Задача 24 (геологический факультет (май), 1995, № 7)**.** Пусть

$$f(x) = \sqrt{x^2-4x+4} - 3, \quad g(x) = \sqrt{x} - a,$$

где a — параметр. Решите относительно x неравенство $f(g(x)) \leqslant 0$.

Задача 25 (ИСАА (июль), 2001, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + a(y+1) = 2a, \\ x^3 + a(2y^3+1) = ay^3 + 2a \end{cases}$$

имеет не более двух решений.

Задача 26 (механико-математический факультет (май), 2002, № 4)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a+1} x + \log_x (19-8a) = 2$$

имеет по крайней мере два корня и при этом произведение всех его корней не менее 0,01.

Задача 27 (психологический факультет, 1992, № 4)**.** Найдите все значения параметров a и b, при которых найдутся два различных корня уравнения $x^3 - 5x^2 + 7x = a$, которые будут также корнями уравнения $x^3 - 8x + b = 0$.

Задача 28 (механико-математический факультет, 1985, № 4). Из трёх значений a: $-1{,}2$; $-0{,}67$; $-0{,}66$ найдите все те значения, при каждом из которых уравнение

$$\big(2^{a+4}+15(x+a)\big)\big(1+2\cos\big(\pi\big(a+\tfrac{x}{2}\big)\big)\big)=0$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющие условию $0\leqslant x\leqslant 1$.

Задача 29 (филологический факультет, 2000, № 5 (6)). Найдите все a, при каждом из которых уравнения

$$(2a-1)x^2+6ax+1=0 \qquad \text{и} \qquad ax^2-x+1=0$$

имеют общий корень.

Задача 30 (психологический факультет, 1990, № 5). Считая известным, что при любом $a>0$ уравнение $2x^3+x^2-x-a-1=0$ имеет единственный положительный корень x_0 (зависящий от a), найдите все $a>0$, при которых $12x_0^3-7x_0>6a+1$.

Ответы. **1.** $a\in(0;1)$. **2.** $b=125$. **3.** $b=-\sqrt{2}$. **4.** $a\in(1;2)$. **5.** $(1;-1)$, $(-1/5;7/5)$. **6.** $a=0;\ 1$. **7.** $c\in[1;5/2)\cup[4;+\infty)$. **8.** Если $b\leqslant-1$, то $x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; если $-1<b\leqslant 0$, то $x\in(-1/\sqrt{1-b^2};-1]\cup\cup[1;+\infty)$. **9.** 1. Если $a\in(0;1/2)$, то $x\in(-3^a;-1)\cup(1;3^a)$; если $a>1/2$, то $x\in(-\infty;-3^a)\cup(3^a;+\infty)$. 2. При $a=1$. **10.** При $c\in(-\infty;1)$ решений нет; если $c\in[1;2)$, то $x\in[-2\sqrt{c-1};2\sqrt{c-1}]$; если $c\in[2;+\infty)$ то $x\in[-c;c]$. **11.** Если $a<1$, то $x\in\Big[-1;\Big(\frac{a-2}{a-1}\Big)^2-1\Big)$; если $a\in[1;2)$, то $x\geqslant-1$; если $a\geqslant 2$, то $x>\Big(\frac{a-2}{a-1}\Big)^2-1$. **12.** $p=7$. **Указание.** Сумма коэффициентов любого многочлена равна его значению в точке 1. **13.** Если $b\in(0;1)$, то $x\in(0;1)\cup(1;b^{-3})$; если $b\in(1;+\infty)$, то $x\in(b^{-3};1)\cup(1;+\infty)$. **14.** Если $a\in(0;1]$, то $x=\pm((1-a^2)/2a)^2$; при других a решений нет. **15.** 1. Если $a\in(-3;-2)$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a\in(-\infty;-2]\cup[-3;+\infty)$, то $x\in(-\infty;3-\sqrt{a^2+5a+6})\cup(3+\sqrt{a^2+5a+6};+\infty)$. 2. $a\in((-5-\sqrt{13})/2;-3]\cup\cup[-2;(-5+\sqrt{13})/2)$. **16.** $x=0$, a при любом a, $x=(a\pm\sqrt{a^2-72})/6$ при $|a|\geqslant 6\sqrt{2}$. **17.** $a\in(7;7{,}5)\cup(7{,}5;+\infty)$. **18.** $a\in(1/15;1/8)\cup(1/8;4/15]\cup\cup\{1/2\}\cup[1;4)$. **19.** При $p=0$ один корень $x=0$, при $p=7$ один корень $x=7^4/2$, при $p>7$ два положительных корня. **20.** $b\in(0;1/50)\cup(25/2;+\infty)$. **21.** $(-\infty;0{,}7]$. **22.** $a=0$, $a\in[-9;-1/4]$. **23.** $p\in(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$. **24.** Если $a\in(-\infty;-5)$, то решений нет; если $a=-5$, то $x=0$; если $a\in(-5;1)$, то $x\in[0;(a+5)^2]$; если $a\in[1;+\infty)$, то $x\in[(a-1)^2;(a+5)^2]$. **25.** $a\in\{-1\}\cup[-1/2;0)\cup(0;1/2]\cup\{1\}$. **26.** $a\in[-9/10;0)\cup(2;9/4)\cup(9/4;19/8)$. **27.** $a=2$, $b=3$. **28.** $a=-1{,}2$; $a=-0{,}67$. **29.** $a=-3/4$, $a=0$, $a=2/9$. **30.** $a\in(0;1/54)$.

§1.2. Простейшие задачи с модулем

А. В задачах с модулем полезны неравенства

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|, \quad |x|-|y| \leqslant |x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Пример 8. При всех a решите неравенство

$$|x+a| > a.$$

Решение. Как и в предыдущем параграфе, отметим, что при замене параметра a на произвольное число получается вполне стандартная задача. Поэтому можно применить метод интервалов для модулей.

Сначала отметим, что при $a<0$ это неравенство, очевидно, верное (так как модуль числа — неотрицательная величина) при любом a. Поэтому получаем часть ответа: если $a<0$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

Если $a=0$, то $|x|>0$ и $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Если $a>0$, то следует рассмотреть два случая: $x<-a$ и $x \geqslant -a$. В первом из них исходное неравенство равносильно следующему:

$$-x-a > a \quad \Longleftrightarrow \quad -x > 2a \quad \Longleftrightarrow \quad x < -2a.$$

Так как $a>0$, число $-2a$ меньше, чем $-a$. Поэтому

$$x \in (-\infty; -2a) \subset (-\infty; -a),$$

и пересечение этих областей совпадает с $(-\infty; -2a)$.

Во втором случае, т. е. при $x+a \geqslant 0$, получаем $x+a>a$, $x>0$, $x \in (0; +\infty)$. Так как $-a<0$, множество $[-a; +\infty)$ содержит множество $(0; +\infty)$, и их пересечение равно $(0; +\infty)$. Поэтому при $a>0$ решением неравенства будет $(-\infty; -2a) \cup (0; +\infty)$.

Объединим части ответа: если $a<0$, то $x \in (-\infty; +\infty)$; если $a=0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; если $a>0$, то $x \in (-\infty; -2a) \cup (0; +\infty)$.

Заметим, что если $a=0$, то $-2a=0$, поэтому последние две части ответа можно объединить так: если $a \geqslant 0$, то $x \in (-\infty; -2a) \cup (0; +\infty)$.

Ответ. Если $a<0$, то $x \in (-\infty; +\infty)$; если $a \geqslant 0$, то $x \in (-\infty; -2a) \cup$ $\cup\, (0; +\infty)$.

Пример 9. При всех a решите неравенство

$$|x+a| < x.$$

Решение. Как и в предыдущей задаче, рассмотрим два случая.

I. Пусть $x + a < 0$. Тогда получаем

$$-x - a < x \iff 2x > -a \iff x > -a/2.$$

Рассматриваемая область задана условием $x < -a$. Часть ответа может быть получена как решение системы неравенств

$$\begin{cases} x > -a/2, \\ x < -a. \end{cases}$$

Если $a > 0$, то число $-a$ меньше, чем $-a/2$, и эта система не имеет решений.

Если $a = 0$, то получаем систему

$$\begin{cases} x > 0, \\ x < 0, \end{cases}$$

очевидно, не имеющую решений.

Если $a < 0$, то $-a > -a/2$, и мы получаем $x \in (-a/2; -a)$.

Итак, часть ответа в первом случае: если $a < 0$, то $x \in (-a/2; -a)$; если $a \geqslant 0$, то $x \in \varnothing$.

II. Пусть $x + a \geqslant 0$. Тогда получаем неравенство $x + a < x$, $a < 0$, которое верно при $a < 0$ в рассматриваемой области, т. е. при $x \geqslant -a$, или $x \in [-a; +\infty)$. При $a \geqslant 0$ это неверное неравенство, не имеющее решений.

Часть ответа: если $a < 0$, то $x \in [-a; +\infty)$; если $a \geqslant 0$, то $x \in \varnothing$.

Объединяя части ответа, получаем: если $a < 0$, то $x \in (-a/2; -a) \cup \cup [-a; +\infty) = (-a/2; +\infty)$; если $a \geqslant 0$, то $x \in \varnothing$.

Ответ. Если $a < 0$, то $x \in (-a/2; -a) \cup [-a; +\infty) = (-a/2; +\infty)$; если $a \geqslant 0$, то $x \in \varnothing$.

Пример 10 (химический факультет, 1992, № 5)**.** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$5|x - 3a| + |x - a^2| + 4x = a$$

1) имеет бесконечное множество решений, 2) не имеет решений.

Решение. Исходное уравнение можно заменить совокупностью четырёх систем:

1) $\begin{cases} 5(x - 3a) + (x - a^2) + 4x = a, \\ x \geqslant 3a, \\ x \geqslant a^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5(3a - x) + (x - a^2) + 4x = a, \\ x \leqslant 3a, \\ x \geqslant a^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(x-3a)+(a^2-x)+4x=a, \\ x \geqslant 3a, \\ x \leqslant a^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5(3a-x)+(a^2-x)+4x=a, \\ x \leqslant 3a, \\ x \leqslant a^2. \end{cases}$

Преобразуем систему 1):

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{10}(a^2+16a), \\ \dfrac{1}{10}(a^2+16a) \geqslant 3a, \\ \dfrac{1}{10}(a^2+16a) \geqslant a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{a^2+16a}{10}, \\ a(a-14) \geqslant 0, \\ a(-9a+16) \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{a^2+16a}{10}, \\ a \in (-\infty;0] \cup \\ \qquad \cup [14;+\infty), \\ a \in [0;16/9]. \end{cases}$$

Данная система совместна только при $a=0$. При этом также $x=0$. Система 2) равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} 14a-a^2=0, \\ x \leqslant 3a, \\ x \geqslant a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a=14, \end{array} \right. \\ x \leqslant 3a, \\ x \geqslant a^2, \end{cases}$$

и она разрешима тоже лишь при $a=0$. Её единственное решение $x=0$. Система 3) сводится к системе

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{8}(16a-a^2), \\ \dfrac{1}{8}(16a-a^2) \geqslant 3a, \\ \dfrac{1}{8}(16a-a^2) \leqslant a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{16a-a^2}{8}, \\ a(a+8) \leqslant 0, \\ a(9a-16) \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{16a-a^2}{8}, \\ a \in [-8;0], \\ a \in (-\infty;0] \cup \\ \qquad \cup [16/9;+\infty). \end{cases}$$

Два последних ее неравенства имеют общее множество решений

$$-8 \leqslant a \leqslant 0.$$

Для каждого a из этого отрезка первое уравнение даёт единственное значение x. Наконец, система 4) принимает вид

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(a^2+14a), \\ \dfrac{1}{2}(a^2+14a) \leqslant 3a, \\ \dfrac{1}{2}(a^2+14a) \leqslant a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{a^2+14a}{2}, \\ a(a+8) \leqslant 0, \\ a(-a+14) \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{a^2+14a}{2}, \\ a \in [-8;0], \\ a \in (-\infty;0] \cup \\ \qquad \cup [14;+\infty). \end{cases}$$

Два последних неравенства также имеют общее множество решений $-8 \leqslant a \leqslant 0$. При каждом значении a из первого уравнения находим единственное значение x.

Подведем итоги. При $a < -8$ и при $a > 0$ ни одна из систем 1)–4) не имеют решений и исходное уравнение тоже не имеет решений. При $-8 \leqslant a < 0$ имеют решение системы 3) и 4), а при $a = 0$ имеют решения все системы 1)–4). Но множество решений каждой из систем при фиксированном $a \in [-8, 0]$ конечное, поэтому исходное уравнение не может иметь бесконечного множества решений ни при каком значении a.

Ответ. 1. Уравнение не имеет бесконечного множества решений ни при каком значении a. 2. При $a \in (-\infty; -8) \cup (0; +\infty)$ уравнение не имеет решений.

Задача 31 (физический факультет (июль), 1965)**.** Для каждого действительного значения параметра a решите уравнение

$$x|x+1| + a = 0.$$

Задача 32 (факультет ВМиК (апрель), 1995, № 4)**.** Для каждого значения a решите неравенство $|x + 2a| \leqslant 1/x$.

Задача 33 (физический факультет (июль), 1984, № 4)**.** При каких значениях a все решения уравнения $2|x-a|+a-4+x = 0$ удовлетворяют неравенству $0 \leqslant x \leqslant 4$?

Задача 34 (геологический факультет, 1991, № 6)**.** При всех значениях параметра a решите уравнение $|x + 2| + a|x - 4| = 6$.

Задача 35 (филологический факультет, 1983, № 5 (5))**.** Найдите все значения a, при которых уравнение $|1 - ax| = 1 + (1 - 2a)x + ax^2$ имеет ровно одно решение.

Задача 36 (ИСАА, 1995, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 + 4x + 6a|x + 2| + 9a^2 \leqslant 0$ имеет не более одного решения.

Задача 37 (химический факультет, 1992, № 5)**.** Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение

$$2x - |x - k^2| = 11k - 3 \cdot |x + 4k|$$

1) не имеет решений, 2) имеет конечное непустое множество решений.

Задача 38 (экономический факультет (отделение политической экономии), 1983, № 6 (6))**.** Определите, при каких значениях a уравнение

$$x - \frac{a}{2} = 4\big|4|x| - a^2\big|$$

имеет ровно три корня. Найдите эти корни.

Задача 39 (психологический факультет (июль), 2003, № 5)**.** При каких значениях параметра a уравнение $2|x - 9a| - 2a^2 + 35 + x = 0$ не имеет решений? При каких остальных значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30; 63]$?

Задача 40 (геологический факультет (отделение общей геологии), 1988, № 6)**.** Найдите все пары значений $(a; b)$ параметров, при каждой из которых уравнение

$$|x - \sin^2 a| + |x + \cos^2 4a - 2\sin a \cdot \cos^4 4a| = b\left(a + \frac{3}{2}\pi\right)$$

имеет единственное решение.

Задача 41 (химический факультет, 1984, № 5)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x+a-4| + \left(\frac{a^2-4a+3}{|a-2|} - |a-2|\right)\cdot|x-2| + \frac{1}{2}|a-2|\cdot|x-a| \leqslant 1$$

выполняется ровно для двух различных значений x.

Ответы. **31.** Если $a < 0$, то $x = (-1 + \sqrt{1-4a})/2$; если $a = 0$, то $x = 0, -1$; если $a \in (0; 1/4)$, то $x = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$, $x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$; если $a = 1/4$, то $x = (-1-\sqrt{2})/2$, $x = -1/2$; если $a > 1/4$, то $x = (-1-\sqrt{1+4a})/2$. **32.** Если $a < -1$, то $x \in (0; -a-\sqrt{a^2-1}] \cup [-a+\sqrt{a^2-1}; -a+\sqrt{a^2+1}]$; если $a \geqslant -1$, то $x \in (0; a+\sqrt{a^2+1}]$. **33.** $a \in [4/3; 2]$. **34.** Если $a < -1$, то $x = 4$; если $a = -1$, то $x \geqslant 4$; если $a \in (-1; 1)$, то $x = 4$, $x = 4(a-2)/(a+1)$; если $a = 1$, то $x \in [-2; 4]$; если $a > 1$, то $x = 4$. **35.** $a = 0$, $a = 1$. **36.** $a \geqslant 2/3$. **37.** 1. Уравнение не имеет решений для $k \in (-23; 0)$. 2. Уравнение имеет конечное непустое множество решений для $k \in (-\infty; -23) \cup (0; +\infty)$. **38.** Если $a = -2$, то $x = -1,\ 15/17,\ 17/15$; если $a = -1/8$, то $x = -1/136,\ 0,\ 1/120$. **39.** 1. $a \in (-5/2; 7)$. 2. $a \in [(9-\sqrt{211})/2; -5/2] \cup \{7\}$. **40.** $(\pi/2+2\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, $(-3\pi/2; t)$, $t \in \mathbb{R}$. **41.** $a = 2 \pm \sqrt{2}$. **Указание.** Сделайте замену $b = a - 2$, $t = (x-2)/b$.

§1.3. Решение обратных задач и задач, в которых параметр рассматривается как отдельная переменная

В следующих задачах удобнее рассматривать параметр в качестве переменной.

Пример 11 (биологический факультет (июль), 1994, № 5). Найдите все такие значения величины x, при которых неравенство

$$(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1<a<3$.

Решение. Преобразуем неравенство следующим образом:

$$-2ax^2+13ax-13a+4x^2-27x+33>0 \iff$$
$$\iff (-2x^2+13x-13)\cdot a+4x^2-27x+33>0.$$

Неравенство приняло линейный относительно a вид:

$$f(a)=k(x)\cdot a+b(x)>0,$$

где $k(x)=-2x^2+13x-13$, $b(x)=4x^2-27x+33$. Коэффициенты его зависят от x. В зависимости от знака коэффициента $k(x)$ при a левая часть неравенства является возрастающей (коэффициент $k(x)$ больше 0) или убывающей (коэффициент $k(x)$ меньше 0) функцией от a. Если коэффициент $k(x)$ равен 0, то это не зависящая от a функция. Дальнейшее решение приведём двумя способами.

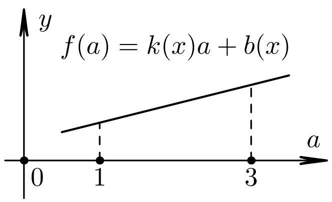

Рис. 1.10. Случай $k(x)>0$

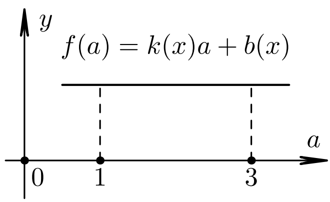

Рис. 1.11. Случай $k(x)=0$

I. Пусть $k(x)>0$. Тогда, как отмечено выше, эта функция возрастает. Поэтому условие положительности функции при $a\in(1;3)$

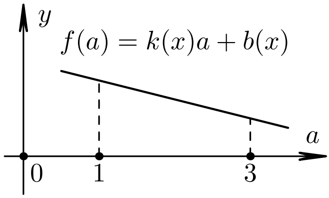

Рис. 1.12. Случай $k(x) < 0$

равносильно условию, что её значение в точке $a = 1$ неотрицательно. Запишем эти условия в виде системы:

$$\begin{cases} k(x) > 0, \\ f(1) \geqslant 0. \end{cases}$$

Если $k(x) = 0$, то неравенство будет верным для всех a, если $b(x) > 0$, т. е.

$$\begin{cases} k(x) = 0, \\ f(0) > 0. \end{cases}$$

Если $k(x) < 0$, то функция $k(x) \cdot a + b(x)$ убывает, поэтому условие её положительности на интервале $(1; 3)$ равносильно тому, что

$$\begin{cases} k(x) < 0, \\ f(3) \geqslant 0. \end{cases}$$

Решая данные системы, мы приходим к ответу (советуем проделать читателю их самостоятельно). А мы приведём полное доказательство вторым способом.

II. Поскольку функция $f(a) = k(x) \cdot a + b(x)$ линейная, условие её положительности на интервале $(1; 3)$ равносильно тому, что

$$\begin{cases} f(1) \geqslant 0, \\ f(3) \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (-2x^2 + 13x - 13) \cdot 1 + 4x^2 - 27x + 33 \geqslant 0, \\ (-2x^2 + 13x - 13) \cdot 3 + 4x^2 - 27x + 33 \geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x^2 - 14x + 20 \geqslant 0, \\ -2x^2 + 12x - 6 \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 7x + 10 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + 3 \leqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (x - 2)(x - 5) \geqslant 0, \\ (x - 3)^2 - 6 \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty; 2] \cup [5; +\infty), \\ (x - 3 + \sqrt{6})(x - 3 - \sqrt{6}) \leqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2] \cup [5; +\infty), \\ x \in [3-\sqrt{6}; 3+\sqrt{6}]. \end{cases}$$

Остаётся, например при помощи метода интервалов, написать ответ.

Ответ. $[3-\sqrt{6}; 2] \cup [5; 3+\sqrt{6}]$.

Задача 42 (биологический факультет (июль), 1994, № 5)**.** Найдите все такие значения величины x, при которых неравенство

$$(2c-6)x^2 + (32-10c)x - (8+c) < 0$$

выполняется для всех c, удовлетворяющих условию $2 < c < 4$.

Задача 43 (физический факультет (май), 1997, № 7)**.** Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x-3a-1}{x+2a-2} \leqslant 0$$

выполняется для всех x из промежутка $2 \leqslant x \leqslant 3$.

Задача 44 (геологический факультет (май), 2002, № 7)**.** При каких положительных значениях параметра неравенство

$$\frac{a+2x}{ax-4} \geqslant \frac{5}{x}$$

справедливо для всех $x > 10$?

Задача 45 (факультет ВМиК (июль), 2004, № 5 (6))**.** Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения

$$\frac{2}{16^x} - \frac{1}{8^x} - \frac{a+8}{4^x} + \frac{4-2a}{2^x} - a^2 + 4a + 5 = 0.$$

Во многих задачах бывают полезны следующие соображения. Часто математические утверждения имеют вид $A \Longrightarrow B$, где A — условие, а B — заключение. Если истинны оба высказывания A и $A \Longrightarrow B$, то истинно и высказывание B. Это рассуждение равносильно следующему: если истинно высказывание $A \Longrightarrow B$, а B — ложно, то A должно быть ложно.

Пример 12 (химический факультет, 1987, № 5)**.** Найдите все значения параметра p, при каждом из которых множество решений неравенства $(p-x^2)(p+x-2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 1$.

Решение. Условия задачи можно переформулировать так: *все решения неравенства*

$$(p - x^2)(p + x - 2) < 0 \tag{1.1}$$

удовлетворяют неравенству $x^2 > 1$. Неравенство (1.1) можно просто решить. Для этого сначала надо попытаться разложить $p - x^2$ на линейные множители. Это не удается сделать, если $p < 0$. Но при этом $p - x^2$ будет меньше 0 для всех x. Поэтому неравенство окажется равносильным неравенству $p + x - 2 > 0$, или $x > 2 - p$. Так как в рассматриваемом случае $p < 0$, мы получаем $2 - p > 2$ и $x^2 > 4 > 1$. Следовательно, все $p < 0$ дают часть ответа задачи.

Пусть $p = 0$. Тогда

$$-x^2(x - 2) < 0 \iff x^2(x - 2) > 0.$$

Решая методом интервалов, находим, что для $p = 0$ решения будут иметь вид $x > 2$. Следовательно, и $p = 0$ даёт часть ответа задачи.

Если $p > 0$, то $p - x^2 = -(x - \sqrt{p})(x + \sqrt{p})$ и неравенство примет вид

$$(x - \sqrt{p})(x + \sqrt{p})(x - 2 + p) > 0. \tag{1.2}$$

Для приложения метода интервалов следует расставить на оси числа $-\sqrt{p}$, $\sqrt{p}$, $2 - p$ в порядке возрастания. Очевидно, $\sqrt{p} > -\sqrt{p}$. Поэтому достаточно сравнить числа $-\sqrt{p}$, $2 - p$ и $\sqrt{p}$, $2 - p$.

$$\begin{aligned} -\sqrt{p} &\vee 2 - p, \\ p - \sqrt{p} - 2 &\vee 0, \\ (\sqrt{p} + 1)(\sqrt{p} - 2) &\vee 0, \\ \sqrt{p} - 2 &\vee 0, \\ \sqrt{p} &\vee 2, \\ p &\vee 4, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sqrt{p} &\vee 2 - p, \\ p + \sqrt{p} - 2 &\vee 0, \\ (\sqrt{p} - 1)(\sqrt{p} + 2) &\vee 0, \\ \sqrt{p} - 1 &\vee 0, \\ \sqrt{p} &\vee 1, \\ p &\vee 1, \end{aligned}$$

Отсюда видно, что нужно разбирать случаи $0 < p < 1$, $p = 1$, $1 < p < 4$, $p = 4$ и $p > 4$.

Пусть $0 < p < 1$. Тогда $-\sqrt{p} < \sqrt{p} < 2 - p$. Методом интервалов из неравенства (1.2) получаем расположение точек, показанное на рис. 1.13. Следовательно, множество $0 < p < 1$ не является решением, так как $x = 0$ — решение исходного неравенства. Аналогично разбирается случай $p = 1$ ($x = 0$ опять будет решением).

Пусть $1 < p < 4$. Тогда $-\sqrt{p} < p - 2 < \sqrt{p}$. Методом интервалов из неравенства (1.2) получаем расположение точек, показанное на

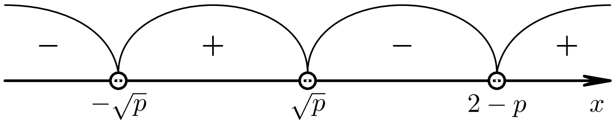

Рис. 1.13. Случай $0 < p < 1$

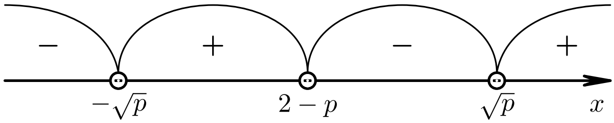

Рис. 1.14. Случай $1 < p < 4$

рис. 1.14, т. е. $x \in (-\sqrt{p}; 2-p) \cup (\sqrt{p}; +\infty)$. Данные значения x удовлетворяют неравенству $x^2 > 1$ в случае, если

$$\begin{cases} \sqrt{p} \geqslant 1, \\ 2-p \leqslant -1 \end{cases} \iff \begin{cases} p \geqslant 1, \\ p \geqslant 3 \end{cases} \iff p \geqslant 3.$$

Следовательно, все $p \in [3; 4)$ удовлетворяют условию задачи.

Осталось рассмотреть последний случай $p \geqslant 4$ (см. рис. 1.15 и 1.16). Поскольку для $p \geqslant 4$ выполнены неравенства $\sqrt{p} > 1$ и $-\sqrt{p} < 1$, то

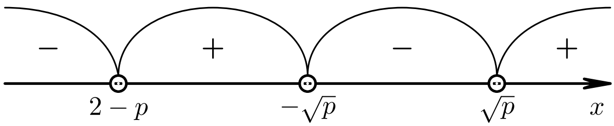

Рис. 1.15. Случай $p > 4$

все $p \geqslant 4$ также удовлетворяют условию задачи.

Ответ. $p \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

Задача 46 (химический факультет, 1987, № 5)**.** Найдите все значения параметра q, при каждом из которых множество решений неравенства

$$(q - x^2)(q + 2x - 8) < 0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 4$.

Задача 47 (ИСАА (июль), 2000, № 5)**.** Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$|x^2 + 4x - a| > 6$$

не имеет решений на отрезке $[-3; 0]$.

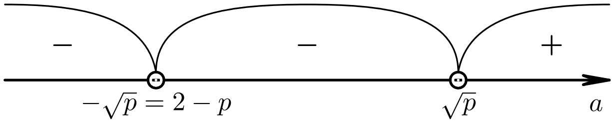

Рис. 1.16. Случай $p=4$

Задача 48 (факультет почвоведения, 1993, № 5 (5))**.** Найдите все значения a, при которых неравенство

$$x+\frac{7a^2+a-2}{x+a+1}<7a-1$$

не имеет положительных решений.

Задача 49 (механико-математический (июль), 1992, № 6)**.** Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(2-a)x^3+(1-2a)x^2-6x+(5+4a-a^2)<0$$

хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-1;2]$.

Ответы. **42.** $[2-\sqrt{10};1]\cup[5;2+\sqrt{10}]$. **43.** $a\in(-\infty;-1/2)\cup[2/3;+\infty]$. **44.** $a\in[2/5;11/2]$. **45.** При $a\in(-\infty;-5/4)$ одно решение; при $a=-5/4$ два решения; при $a\in(-5/4;-1)$ три решения; при $a\in[-1;1-\sqrt{2})$ два решения; при $a=1-\sqrt{2}$ одно решение; при $a\in(1-\sqrt{2};5)$ два решения; при $a\in[5;+\infty)$ одно решение. **46.** $q\in(-\infty;0]\cup[12;+\infty)$. **47.** $a\in[-9;2]$. **48.** $a\in[-1;-1/5]$. **49.** $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(2;+\infty)$.

§1.4. Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром

При решении задач, связанных с тригонометрией, необходимо знать следующее.

I. *Все* тригонометрические формулы. Периоды тригонометрических функций: у функций $\sin x$, $\cos x$ период 2π, у $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ период π.

II. Ограниченность функций $\cos x$, $\sin x$ по модулю единицей.

III. *Метод вспомогательного аргумента*, который состоит во введении дополнительного угла для упрощения выражения. Продемонстрируем метод вспомогательного угла на примере тригонометрического уравнения:

$$a\cos x + b\sin x = c, \quad a^2+b^2 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Константы $A = a/(\sqrt{a^2+b^2})$, $B = b/(\sqrt{a^2+b^2})$ удовлетворяют урав-

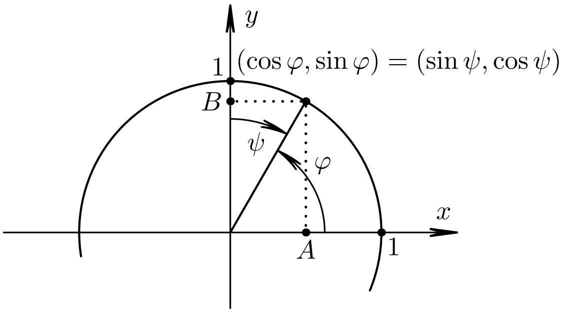

Рис. 1.17

нению окружности радиуса 1, т. е. $A^2 + B^2 = 1$. Следовательно существует такой угол ψ, что $\sin\psi = A$, $\cos\psi = B$. Для $A, B \geqslant 0$ угол ψ определяется уравнением $\psi = \operatorname{arctg}(a/b)$. Исходное уравнение принимает вид

$$\sin\psi\cos x + \cos\psi\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(x+\psi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Последнее уравнение уже допускает тривиальное решение.

Замечание. Аналогично показывается существование такого угла φ, что $\cos\varphi = A$, $\sin\varphi = B$. Для $A, B \geqslant 0$ угол φ определяется уравнением $\varphi = \operatorname{arctg}(b/a)$. А исходное уравнение теперь принимает вид

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Для $A, B \geqslant 0$ углы ψ и φ связаны соотношением $\psi = \pi/2 - \varphi$ (см. рис. 1.17).

Пример 13 (филологический факультет, 1985, № 5)**.** Для каждого значения a решите уравнение

$$4\cos x\sin a + 2\sin x\cos a - 3\cos a = 2\sqrt{7}.$$

Решение. Уравнение имеет следующий вид:

$$A(a)\cos x + B(a)\sin x = C(a),$$

где

$$A(a) = 4\sin a,$$
$$B(a) = 2\cos a,$$
$$C(a) = 2\sqrt{7} + 3\cos a.$$

Преобразуем уравнение способом, указанным выше. Получаем

$$\sqrt{A^2(a)+B^2(a)}\,\bigl(\sin\bigl(x+\varphi(a)\bigr)\bigr) = C(a).$$

Вычислим

$$\sqrt{A^2(a)+B^2(a)} = \sqrt{16\sin^2 a + 4\cos^2 a} = \sqrt{12\sin^2 a + 4} \geqslant 2 > 0.$$

Поэтому уравнение равносильно следующему:

$$\sin\bigl(x+\varphi(a)\bigr) = \frac{C(a)}{\sqrt{A^2(a)+B^2(a)}}.$$

Условие его разрешимости таково:

$$\left|\frac{C(a)}{\sqrt{A^2(a)+B^2(a)}}\right| \leqslant 1 \quad\Longleftrightarrow\quad |C(a)| \leqslant \sqrt{A^2(a)+B^2(a)} \quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad (2\sqrt{7}+3\cos a)^2 \leqslant 16\sin^2 a + 4\cos^2 a \quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad 28 + 12\sqrt{7}\cos a + 9\cos^2 a \leqslant 16(1-\cos^2 a) + 4\cos^2 a \quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad 12 + 12\sqrt{7}\cos a + 21\cos^2 a \leqslant 0 \quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad 4 + 4\sqrt{7}\cos a + 7\cos^2 a \leqslant 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (2+\sqrt{7}\cos a)^2 \leqslant 0.$$

Это означает, что уравнение имеет решение только при $\cos a = -2/\sqrt{7}$. При этом возможны два случая:

$$1)\ \begin{cases}\cos a = -2/\sqrt{7},\\ \sin a = \sqrt{3/7},\end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases}\cos a = -2/\sqrt{7},\\ \sin a = -\sqrt{3/7}.\end{cases}$$

Подставим найденное значение в исходное уравнение. В первом случае ($\cos a = -2/\sqrt{7}$, $\sin a = \sqrt{3/7}$) мы получаем

$$4\cos x\cdot\sqrt{\frac{3}{7}} + 2\sin x\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right) + \frac{6}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{7} \quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad 4\sqrt{3}\cos x - 4\sin x + 6 = 14 \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{3}\cos x - \sin x = 2 \quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 2 \quad\Longleftrightarrow\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 1,$$

или $x = -\pi/6 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Во втором случае

$$4\cos x \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + 2\sin x \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right) + \frac{6}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{7} \iff$$
$$\iff \quad -4\sqrt{3}\cos x - 4\sin x + 6 = 14 \iff -\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2 \iff$$
$$\iff \quad 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -2 \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$$

или $x = \pi/6 - \pi + 2\pi n = -5\pi/6 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ. Если $a = \arccos(-2/\sqrt{7}) + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, то $x = -\pi/6 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; если $a = -\arccos(-2/\sqrt{7}) + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, то $x = -5\pi/6 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; при других значениях параметра a решений нет.

Пример 14 (биологический факультет и факультет фундаментальной медицины, 2001, № 6 (6))**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \cos(x\sqrt{6 - 2a^2}), \\ \cos x = (a - 2/3)\sin(x\sqrt{6 - 2a^2}) \end{cases}$$

имеет ровно одно решение на отрезке $[0; 2\pi]$.

Решение. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \sin x = \sin(\pi/2 - x\sqrt{6 - 2a^2}), \\ \cos x = (a - 2/3)\cos(\pi/2 - x\sqrt{6 - 2a^2}) \end{cases}$$

и введём обозначения $\alpha = \alpha(x, a) = \pi/2 - x\sqrt{6 - 2a^2}$. Тогда исходная система принимает вид

$$\begin{cases} \sin x = \sin\alpha, \\ \cos x = (a - 2/3)\cos\alpha. \end{cases}$$

Равенство $\sin x = \sin\alpha$ означает, что соответствующие косинусы могут отличаться только знаком, т. е.

$$\begin{cases} \sin x = \sin\alpha, \\ \cos x = (a - 2/3)\cos\alpha \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = \sin\alpha, \\ \cos x = \cos\alpha, \\ \cos x = (a - 2/3)\cos\alpha \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \sin\alpha, \\ \cos x = -\cos\alpha, \\ \cos x = (a - 2/3)\cos\alpha \end{cases} \end{array} \right. \iff$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = \sin\alpha, \\ \cos x = \cos\alpha, \\ \cos x\cdot(5/3-a)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \sin\alpha, \\ \cos x = -\cos\alpha, \\ \cos x\cdot(1/3+a)=0 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi/2, \\ x=3\pi/2, \\ a=5/3, \\ a=-1/3. \end{array}\right.$$

Разберём все четыре случая.

I. Пусть $a=-1/3$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} \sin x = \sin\alpha, \\ \cos x = -\cos\alpha \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \alpha = (\pi - x) + 2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Но $\alpha = \pi/2 - x\cdot 2\sqrt{13}/3$, следовательно,

$$\alpha = (\pi - x) + 2\pi n \quad \Longleftrightarrow \quad x = x_n = \frac{-\pi/2+2\pi n}{2\sqrt{13}/3-1}, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Покажем, что среди найденных значений x_n в отрезок $[0;2\pi]$ попадает только x_1. Сначала докажем, что число $2\sqrt{13}/3-1$ принадлежит интервалу $(1;5/3)$. Действительно,

$$2\sqrt{13}/3-1 > 2\cdot 3/3 - 1 = 1,$$
$$2\sqrt{13}/3-1 < 2\cdot 4/3 - 1 = 8/3-1 = 5/3.$$

Теперь проведём отбор корней

$$x_n = \frac{-\pi/2+2\pi n}{2\sqrt{13}/3-1} \leqslant \frac{-\pi/2}{2\sqrt{13}/3-1} = x_0 < 0, \quad n\leqslant 0,$$
$$x_1 = \frac{3\pi/2}{2\sqrt{13}/3-1} \in (0;3\pi/2),$$
$$x_n = \frac{-\pi/2+2\pi n}{2\sqrt{13}/3-1} \geqslant \frac{7\pi/2}{2\sqrt{13}/3-1} = x_2 > \frac{7\pi/2}{5/3} = \frac{21\pi}{10} > 2\pi, \quad n\geqslant 2,$$

Вывод: при $a=-1/3$ исходная система уравнений действительно имеет единственное решение

$$x = \frac{3\pi/2}{2\sqrt{13}/3-1}.$$

II. Пусть $a = 5/3$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} \sin x = \sin \alpha, \\ \cos x = \cos \alpha \end{cases} \iff \alpha = x + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Но $\alpha = \pi/2 - x \cdot 2/3$, следовательно,

$$\alpha = x + 2\pi n \iff x = x_n = 3\pi/10 + 6\pi/5n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Среди найденных значений x_n в отрезок $[0; 2\pi]$ попадают $x_0 = 3\pi/10$ и $x_1 = 15\pi/10 = 3\pi/2$.

Вывод: при $a = 5/3$ исходная система уравнений имеет два решения, т. е. при $a = 5/3$ не выполнены условия задачи.

III. Пусть $x = \pi/2$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} 1 = \sin \alpha, \\ 0 = (a - 2/3) \cos \alpha, \end{cases}$$

где $\alpha = \pi/2 \cdot (1 - \sqrt{6 - 2a^2})$. Из первого уравнения находим

$$\alpha = \pi/2 + 2\pi n \iff 1 - \sqrt{6 - 2a^2} = 1 + 4n \iff$$
$$\iff \sqrt{6 - 2a^2} = -4n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Но так как $\sqrt{6 - 2a^2} \in [0; \sqrt{6}]$, решения в уравнении $\sqrt{6 - 2a^2} = -4n$, $n \in \mathbb{Z}$, возможны лишь при $n = 0$, т. е.

$$\sqrt{6 - 2a^2} = 0 \iff a = \pm\sqrt{3}.$$

При $a = \pm\sqrt{3}$ мы имеем $a - 2/3 \neq 0$, поэтому исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0. \end{cases}$$

Следовательно, система имеет единственное на отрезке $[0; 2\pi]$ решение $x = \pi/2$.

Вывод: при $a = \pm\sqrt{3}$ исходная система уравнений действительно имеет единственное решение $x = \pi/2$.

IV. Пусть $x = 3\pi/2$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} -1 = \sin \alpha, \\ 0 = (a - 2/3) \cos \alpha, \end{cases}$$

где $\alpha = \pi/2 \cdot (1 - 3\sqrt{6 - 2a^2})$. Из первого уравнения находим

$$\alpha = 3\pi/2 + 2\pi n \iff 1 - 3\sqrt{6-2a^2} = 3 + 4n \iff$$
$$\iff \sqrt{6-2a^2} = -2/3 - 4n/3, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Но так как $\sqrt{6-2a^2} \in [0; \sqrt{6}]$, решения в уравнении

$$\sqrt{6-2a^2} = -2/3 - 4n/3, \quad n \in \mathbb{Z},$$

возможны лишь при $n = -1, -2$, т. е.

$$\sqrt{6-2a^2} = 2/3, 2 \iff a = \pm 5/3, \pm 1.$$

Случай $a = 5/3$ разобран в п. II и не подходит. Заметим, что при $a = -5/3$, ± 1 справедливо неравенство $(a - 2/3) \neq \pm 1$. Следовательно, система

$$\begin{cases} \sin x = \sin\alpha, \\ \cos x = (a - 2/3)\cos\alpha. \end{cases}$$

может иметь только решения $x = \pi/2$, $3\pi/2$, (так как из равенства $\sin x = \sin\alpha$ вытекает, что $|\cos x| = |\cos\alpha|$). Но решение $x = \pi/2$ возможно лишь при $a = \pm\sqrt{3}$ (см. п. III). Поэтому остаётся случай $x = 3\pi/2$. Но, как было показано выше, $x = 3\pi/2$ является решением системы, а следовательно, и единственным, так как других решений нет.

Вывод: при $a = -5/3$, ± 1 исходная система уравнений действительно имеет единственное решение $x = 3\pi/2$.

Ответ. $-1/3$, $-5/3$, ± 1, $\pm\sqrt{3}$.

Задача 50 (геологический факультет, 1993, № 6)**.** Найдите все значения параметра k, при которых ровно одна точка графика функции

$$y = 2x + (\lg k)\sqrt{\cos(2k\pi x) + 2\cos(k\pi x) - 3} + 1$$

лежит в области $(2x - 7)^2 + 4(y - 3)^2 \leqslant 25$.

Задача 51 (географический факультет (май), 1995, № 6 (6))**.** Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$y(x) = \log_{25-a^2}(\cos x + \sqrt{8}\sin x - a)$$

определена при всех значениях x.

Задача 52 (ИСАА (июль), 1996, №6 (6))**.** При каких значениях a неравенство

$$\log_{(2a-15)/5}\left(\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x+a-5}{5}\right)>0$$

выполняется при всех x?

Задача 53 (механико-математический факультет (март), 1996, №4)**.** При каких значениях a уравнение

$$2\cos^2\left(2^{2x-x^2}\right)=a+\sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2+1}\right)$$

имеет хотя бы одно решение?

Задача 54 (географический факультет (июль), 1999, № 4 (6))**.** Найдите все значения a, при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x+6a\cos x-\sin x-3a=0$$

найдутся два корня, разница между которыми равна $3\pi/2$.

Задача 55 (геологический факультет (отделение геофизики), 1989, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a^2-6a+9)(2+2\sin x-\cos^2 x)+(12a-18-2a^2)\cdot(1+\sin x)+a+3=0$$

не имеет решений.

Задача 56 (экономический факультет (отделение политической экономии), 1988, №6)**.** Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$|3\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a|\leqslant 3$$

выполняется для любых значений x.

Задача 57 (филологический факультет, 1985, №5)**.** Для каждого значения b решите уравнение

$$3\cos x\sin b-\sin x\cos b-4\cos b=3\sqrt{3}.$$

Задача 58 (геологический факультет (отделение геофизики), 1988, №6)**.** Найдите все действительные значения параметра a, при каждом из которых область значений функции

$$y=\frac{\sin x+2(1-a)}{a-\cos^2 x}$$

содержит отрезок $[1;2]$.

Задача 59 (геологический факультет (отделение общей геологии), 2001, №8)**.** При каких значениях параметра $a \geqslant 1$ уравнение

$$\sin\left(\frac{4}{13}x\right) \cdot \operatorname{tg} x = 0.$$

имеет ровно шесть различных корней на отрезке $[2a\pi; (a^2+1)\pi]$? Укажите эти корни.

Задача 60 (ИСАА (июль), 2001, №7)**.** Решите уравнение

$$\frac{3\cos x + 2\sin x}{\cos x} = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} \cdot \sqrt{3 + 2x - 2y + 2xy - x^2 - y^2}.$$

Задача 61 (экономический факультет (отделение планирования и экономической кибернетики), 1988, №6)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любой корень уравнения

$$a(2a-1)\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0$$

является корнем уравнения

$$\log_{1/2}(3\operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3\operatorname{tg} x + 1) - \log_{1/\sqrt{2}}(5 - \operatorname{tg} x) = 1$$

и, наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Задача 62 (биологический факультет и факультет фундаментальной медицины, 2001, №6 (6))**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \cos x = \sin(x\sqrt{4-7a^2}), \\ \sin x = (3a - 1/2)\cos(x\sqrt{4-7a^2}) \end{cases}$$

имеет ровно одно решение на отрезке $[\pi/2; 5\pi/2]$.

Задача 63 (психологический факультет, 1996, № 5)**.** Пусть t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения

$$t^2 - (5b-2)^2 t - 3b^2 - 7b + 1 = 0.$$

Найдите все значения параметра b, при каждом из которых для любого значения параметра a функция

$$f(x) = \cos(a\pi x) \cdot \cos((t_1^3 + t_2^3) \cdot \pi x)$$

является периодической.

Задача 64 (механико-математический факультет (май), 1993, № 6)**.** Найдите все значения a, для которых неравенство

$$\log_5(a\cos 2x - (1 + a^2 - \cos^2 x)\sin x + 4 - a) \leqslant 1$$

выполняется при всех x.

Задача 65 (механико-математический факультет (июль), 2000, № 5 (6))**.** Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(|a| - 1)\cos 2x + (1 - |a - 2|)\sin 2x + (1 - |2 - a|)\cos x + (1 - |a|)\sin x = 0$$

имеет нечётное число решений на интервале $(-\pi; \pi)$.

Задача 66 (биологический факультет (июль), 1997, № 6)**.** Найдите решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{1}{20}\left(\dfrac{x^2}{\sin x}\right)^2 - \dfrac{x^{3/2}}{\sqrt{\sin x}} + 1 < 0, \\ \left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2 \geqslant \dfrac{\pi}{24}\left(\dfrac{5\pi}{6} - x\right), \\ x^2 - \dfrac{x^{3/2}}{\sqrt{\cos x}} + \dfrac{5}{4} < 0. \end{cases}$$

Задача 67 (геологический факультет, 1986, № 6)**.** При всех значениях параметра $p \leqslant 9$ найдите решения уравнения

$$3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{15}\sin x - \frac{3\pi}{5}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{7}\sin^2 x + \frac{3\pi}{14}\right) +$$
$$+\cos^2\left(\frac{5\pi}{14} - \frac{\pi}{7}\cos(2x)\right) = 6\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{15}\sin x + \frac{2\pi}{5}\right) - p$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.

Задача 68 (механико-математический факультет (март), 2003, № 6)**.** Найдите все значения a, при каждом из которых расстояние между любыми двумя соседними корнями уравнения

$$\cos\alpha\cos 3x - \sin 3\alpha\cos x + 2\sin 2\alpha\cos 2x = 3\sin\alpha - \cos 3x$$

не превосходит $\pi/3$.

Ответы. **50.** $k \in [1;2) \cup (2;3]$. **51.** $a \in (-5;-\sqrt{24}) \cup (-\sqrt{24};-3)$. **52.** $a \in (15/2;8) \cup (8;12)$. **53.** $a \in [-1;2)$. **54.** $a = \pm 1/6, \pm\sqrt{2}/6$. **55.** $a \in (-\infty;-3) \cup (1;6)$. **56.** $a \in [-12/5;0]$. **57.** Если $b = 5\pi/6 + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, то $x = \pi/6 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; если $b = -5\pi/6 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, то $x = 5\pi/6 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; при других значениях параметра b решений нет. **58.** $a = [1/3;33/32]$. **Указание.** Перепишите условие в виде неравенств. **59.** $a \in \{3\} \cup [\sqrt{10};\sqrt{11}]$. **60.** $x = \pi n$, $y = \pi n - 1$, $n \in \mathbb{Z}$. **Указание.** Перейдите к переменной $t = \operatorname{tg} x$ и исследуйте подкоренное выражение. **61.** $a = 1$. **Указание.** Решите второе уравнение. **62.** $-1/6$, $-1/2$, $\pm 3/4$, $\pm\dfrac{1}{4\sqrt{39/7}}$. **63.** $b = 2/5$. **64.** $[0;1)$. **65.** $a \in [0;1) \cup (1;2] \cup \{3\}$. **Указание.** Представьте уравнение в виде $A\cos 2x + B\sin 2x = -B\cos x + A\sin x$ и решите при помощи введения вспомогательного аргумента (одного угла φ для выражений в разных частях уравнения). **66.** $[11\pi/24;\pi/2)$. **Указание.** Рассмотрите первое уравнение как квадратное относительно x^2, третье как квадратное относительно x, напишите условия $D > 0$ и покажите, что вместе с другими неравенствами это даст множество $[11\pi/24;\pi/2)$. Проверкой убедитесь, что данное множество подходит. **67.** Если $p = 9$, то $x = 3\pi/2$; при $p < 9$ решений нет. **Указание.** Рассмотрите аргументы у тангенсов (они равны) и синуса с косинусом. **68.** $\alpha = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **Указание.** Уравнение по $\cos x$ является кубическим, поэтому расположение корней задаётся однозначно.

§1.5. Уравнения, сводящиеся к исследованию квадратного уравнения

Для квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \tag{1.3}$$

выделяем три случая.

1. Если $D = b^2 - 4ac < 0$, то действительных решений у квадратного уравнения (1.3) нет.

2. Если $D = b^2 - 4ac = 0$, то решение квадратного уравнения (1.3) принимает вид $x = -b/2a$.

3. Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то квадратное уравнение (1.3) имеет два корня и для этих корней x_1, x_2 справедливо соотношение

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

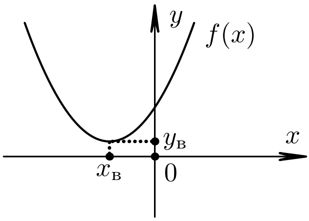

Рис. 1.18. $D < 0$, $a > 0$

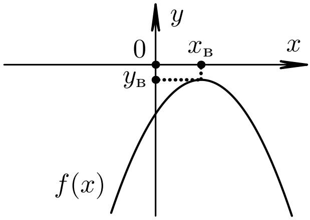

Рис. 1.19. $D < 0$, $a < 0$

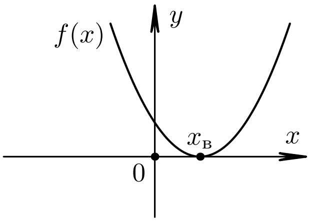

Рис. 1.20. $D = 0$, $a > 0$

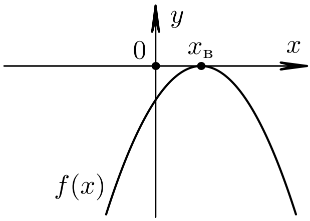

Рис. 1.21. $D = 0$, $a < 0$

I. Важную роль при решении задач с параметром для квадратных уравнений играет *теорема Виета*. Для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, где x_1, x_2 — корни уравнения (случай $D \geqslant 0$), выполнено равенство $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Отсюда выводим формулы Виета:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

II. Второе важное замечание состоит в том, что при решении задач, сводящихся к исследованию квадратных уравнений, нужно помнить о геометрической интерпретации квадратного уравнения. Например, выделяя полный квадрат в уравнении (1.3), получаем (случай $a \neq 0$)

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = a \cdot (x - x_в)^2 + y_в,$$

где

$$x_в = -\frac{b}{2a}, \quad y_в = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Отсюда находим вершину параболы $(x_в; y_в)$. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, причём абсцисса вершины параболы является точ-

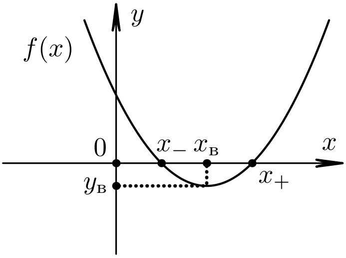

Рис. 1.22. $D > 0$, $a > 0$

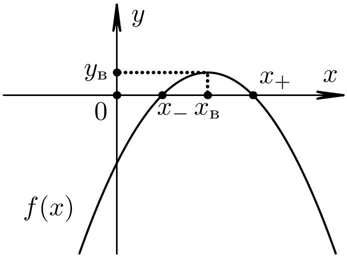

Рис. 1.23. $D > 0$, $a < 0$

кой минимума. При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз, причём абсцисса вершины параболы является точкой максимума.

Пример 15 (ЕГЭ (демо), 2005, № В6). При каких значениях a функция

$$y = \frac{2^{ax+7}}{2^{x^2}}$$

имеет максимум при $x = 4$?

Решение. Исходную функцию представим в виде

$$y = 2^{-x^2+ax+7}.$$

Поскольку функция 2^t монотонно возрастает, максимум функции

$$y = 2^{-x^2+ax+7}$$

достигается в той же точке, что и у квадратичной функции

$$f(x) = -x^2 + ax + 7.$$

У этой параболы ветви направлены вниз, следовательно, максимум достигается в вершине параболы, т. е. в точке $x_в = a/2$. Но согласно условию $x_в = 4$, следовательно, $a = 8$.

Ответ. $a = 8$.

Пример 16. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$ax^2 + x + 3a^3 > 0.$$

Решение. Пусть $a = 0$. Тогда решением неравенства будет множество чисел $x > 0$.

При $a \neq 0$ функция $f(x) = ax^2 + x + 3a^3$ — квадратный трёхчлен, её график — парабола. Рассмотрим ещё три случая, в зависимости от знака дискриминанта $D = 1 - 12a^4$ функции $f(x)$, т. е. случаи $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

I. Пусть $D = 1 - 12a^4 < 0$, т. е. $a \in (-\infty; -1/\sqrt[4]{12}) \cup (1/\sqrt[4]{12}; +\infty)$. Тогда в зависимости от знака a функция $f(x)$ будет всюду положительна либо всюду отрицательна (см. рис. 1.24 и рис. 1.25). Для $a > 0$,

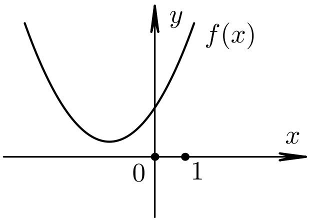

Рис. 1.24

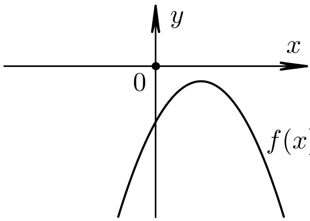

Рис. 1.25

точнее, для $a \in (1/\sqrt[4]{12}; +\infty)$, получаем $f(x) > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Для $a < 0$ получаем $f(x) < 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Частичный ответ: при $a \leqslant -1/\sqrt[4]{12}$ решений нет; если $a > 1/\sqrt[4]{12}$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

II. Пусть $D = 1 - 12a^4 = 0$, т. е. $a = \pm 1/\sqrt[4]{12}$. Тогда у квадратного уравнения $f(x) = 0$ будет единственный корень $x_0 = -1/2a$ (см. рис. 1.26 и рис. 1.27). Для $a > 0$ получаем $f(x) > 0$ для любого

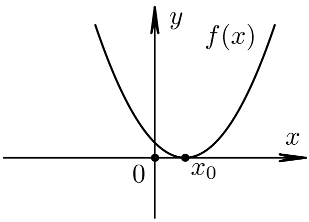

Рис. 1.26

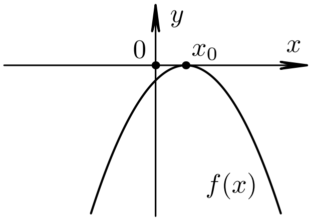

Рис. 1.27

$x \in \mathbb{R} \backslash \{-\sqrt[4]{12}/2\}$. Для $a < 0$ получаем $f(x) \leqslant 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Частичный ответ: при $a = -1/\sqrt[4]{12}$ решений нет; если $a = 1/\sqrt[4]{12}$, то $x \in (-\infty; +\infty) \backslash \{-\sqrt[4]{12}/2\}$.

III. Пусть $D = 1 - 12a^4 > 0$, т. е. $a \in (-1/\sqrt[4]{12}; 1/\sqrt[4]{12})$. Тогда у квадратного уравнения $f(x) = 0$ будет два решения (см. рис. 1.28 и рис. 1.29)

$$x_+ = \frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}, \quad x_- = \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}.$$

Для $a > 0$ получаем $f(x) > 0$ для любого $x \in (-\infty; x_-) \cup (x_+; +\infty)$.
Для $a < 0$ получаем $f(x) > 0$ для любого $x \in (x_+; x_-)$.

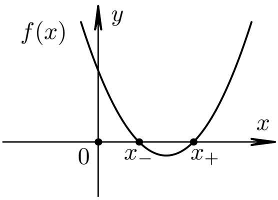

Рис. 1.28.

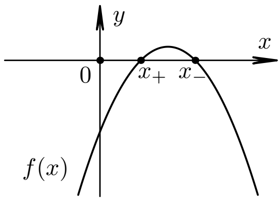

Рис. 1.29.

Частичный ответ:
если $0 < a < \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; +\infty\right)$;
если $-1/\sqrt[4]{12} < a < 0$, то $x \in \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right)$.

Объединяя эти результаты, получаем ответ.

Ответ. При $a \leqslant -1/\sqrt[4]{12}$ решений нет; если $-1/\sqrt[4]{12} < a < 0$, то $x \in \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right)$; если $a = 0$, то $x \in (0; +\infty)$; если $0 < a \leqslant 1/\sqrt[4]{12}$, то $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; +\infty\right)$; если $a > 1/\sqrt[4]{12}$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

Пример 17 (экономический факультет (отделение менеджмента), 1995, № 6)**.** Найдите все значения b, при которых уравнение

$$x - 2 = \sqrt{2(b-1)x+1}$$

имеет единственное решение.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ (x-2)^2 = 2(b-1)x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x^2 - 2(b+1)x + 3 = 0. \end{cases}$$

У квадратной параболы $f(x) = x^2 - 2(b+1)x + 3$ ветви направлены вверх, поэтому единственное решение возможно лишь в следующих случаях (см. соответствующие рисунки 1.30–1.34):

$$\textbf{I.}\ \begin{cases} D > 0, \\ f(2) < 0; \end{cases} \qquad \textbf{II.}\ \begin{cases} D > 0, \\ f(2) = 0, \\ x_{\text{в}} < 2; \end{cases} \qquad \textbf{III.}\ \begin{cases} D = 0, \\ x_{\text{в}} \geqslant 2. \end{cases}$$

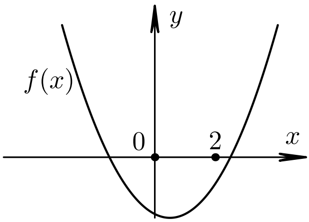

Рис. 1.30. Случай I

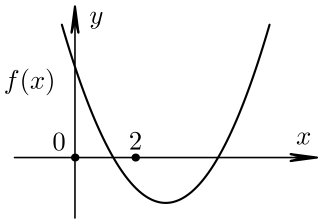

Рис. 1.31. Случай I

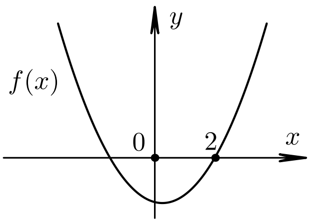

Рис. 1.32. Случай II

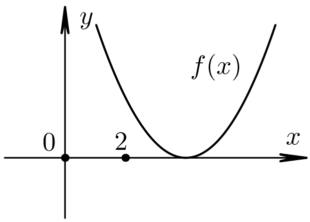

Рис. 1.33. Случай III

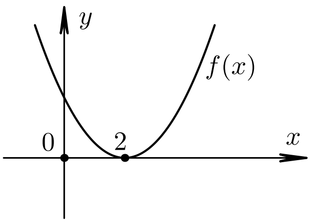

Рис. 1.34. Случай III

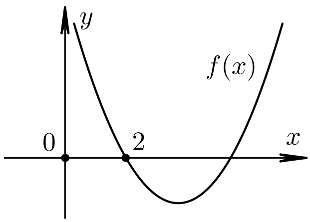

Рис. 1.35. Случай двух корней

Найдем дискриминант уравнения $f(x) = 0$:

$$D = 4(b+1)^2 - 4 \cdot 3 = 4(b+1-\sqrt{3})(b+1+\sqrt{3}).$$

Разберём теперь каждый из перечисленных выше трёх случаев:

$$\textbf{I.}\quad \begin{cases} D > 0, \\ f(2) < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b \in (-\infty; -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}; +\infty), \\ 4 - 4(b+1) + 3 < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b \in (-\infty; -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}; +\infty), \\ b > 3/4. \end{cases}$$

Сравним числа $-1+\sqrt{3}$ и $3/4$:

$$\begin{aligned} -1+\sqrt{3} &\vee 3/4, \\ \sqrt{3} &\vee 7/4, \\ 4\sqrt{3} &\vee 7, \\ 48 &< 49. \end{aligned}$$

Таким образом, решением в первом случае является множество всех значений $b > 3/4$. Разберём второй случай. Вообще говоря, второй случай приходится разбирать отдельно от первого, поскольку возможна ситуация (см. рис. 1.35), когда $D > 0$ и $f(2) = 0$, но при этом мы имеем два решения (случай $x_{\text{в}} > 2$).

$$\textbf{II.}\quad \begin{cases} D > 0, \\ f(2) = 0, \\ x_{\text{в}} < 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b \in (-\infty; -1-\sqrt{3}) \cup \\ \qquad \cup (-1+\sqrt{3}; +\infty), \\ b = 3/4, \\ \dfrac{2(b+1)}{2} < 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad b = 3/4.$$

Остаётся разобрать последний случай:

$$\textbf{III.}\quad \begin{cases} D = 0, \\ x_{\text{в}} \geqslant 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = -1 \pm \sqrt{3}, \\ b \geqslant 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad b \in \varnothing.$$

Объединяя воедино все три случая, получаем ответ.

Ответ. $b \in [3/4; +\infty)$.

Задача 69 (ЕГЭ (демо), 2005, № B6). При каких значениях a функция

$$y = \frac{3^{x^2}}{3^{ax-11}}$$

имеет минимум при $x = 6$?

Задача 70 (ИСАА, 1998, № 7 (7))**.** При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4-(a-1)\sqrt{a+3}\,y+a^4+2a^3-9a^2-2a+8=0,\\ y=\sqrt{a+3}\,x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

Задача 71 (московская школа экономики (июль), 2005, № 8 (8))**.** При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)\cdot 4^x+(2a-3)\cdot 6^x=(3a-4)\cdot 9^x$$

имеет единственное решение?

Задача 72 (механико-математический факультет (июль), 1993, № 2)**.** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$4^x+(a^2+5)\cdot 2^x+9-a^2=0$$

не имеет решений.

Задача 73 (физический факультет (июль), 1994, № 7)**.** Найдите все значения a, для каждого из которых система

$$\begin{cases} -x^2+12x-a\geqslant 0,\\ x\leqslant 2 \end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x.

Задача 74 (физический факультет (май), 1994, № 7)**.** При каких значениях a уравнение $2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$ имеет четыре различных корня?

Задача 75 (физический факультет (май), 1998, № 7)**.** Найдите все значения a, при которых неравенство $\log_{1/5}(x^2-ax+7)<-1$ выполняется для всех значений x из промежутка $x<0$.

Задача 76 (экономический факультет (отделение менеджмента), 2005, № 6 (6))**.** Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$\sqrt[3]{x^6}-\left(\frac{1}{a}-2\right)\cdot\sqrt[4]{x^4}+1-\frac{2}{a}=0$$

являются целыми числами.

Задача 77 (психологический факультет, 1993, № 5)**.** Обозначим через x_1 и x_2 корни квадратного трёхчлена

$$(a-1)x^2-(2a+1)x+2+5a.$$

1. Найдите все значения параметра a, при которых $x_1>1$ и $x_2>1$.

2. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых величина $(x_1-b)(x_2-b)$ принимает постоянное значение при всех a, при которых она определена.

Задача 78 (механико-математический факультет (июль), 2002, № 5)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых сумма арктангенсов корней уравнения $x^2+(1-2a)x+a-4=0$ больше, чем $\pi/4$.

Задача 79 (экономический факультет (отделение менеджмента), 1995, № 6)**.** Найдите все значения p, при которых уравнение

$$x-2=\sqrt{-2(p+2)x+2}$$

имеет единственное решение.

Задача 80 (психологический факультет, 1989, № 5)**.** При каждом значении параметра a найдите все решения неравенства

$$x+2a-2\sqrt{3ax+a^2}>0.$$

Задача 81 (экономический факультет (отделение экономики) (июль), 2003, № 6)**.** Найдите все значения b, при которых уравнение

$$3\cdot\sqrt[5]{x+2}-16b^2\cdot\sqrt[5]{32x+32}=\sqrt[10]{x^2+3x+2}$$

имеет единственное решение.

Задача 82 (географический факультет (май), 2002, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a-1)\cos^2 x-(a^2+a-2)\cos x+2a^2-4a+2=0$$

имеет более одного решения на отрезке $[0;4\pi/3]$.

Задача 83 (биологический факультет и факультет фундаментальной медицины (июль), 2002, № 5)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x^2+2(a-2)x+a^2-4a)^2+(a+5)(x^2+2(a-2)x+a^2-4a)-a^2+8a+2=0$$

имеет: а) единственное решение; б) ровно два различных решения.

Ответы. **69.** $a = 12$. **70.** $a = 2$. **71.** $a \in (-\infty; 1] \cup \{5/4\} \cup [4/3, +\infty)$. **72.** $|a| \leqslant 3$. **73.** $a \in (-\infty; 20]$. **74.** $a \in (0; 1/8)$. **75.** $a > -2\sqrt{2}$ **76.** $a = 2$. **Указание.** Квадратное уравнение должно иметь хотя бы один положительный корень. **77.** 1. $(1; (2+\sqrt{13})/4]$; 2. $b = 7/3$. **78.** $a \in (2; +\infty)$. **79.** $(-\infty; -3/2]$. **80.** При $a < 0$ решений нет; если $a = 0$, то $x \in (0; +\infty)$; если $a > 0$, то $x \in [-a/3; 0)$, $(8a; +\infty)$. **81.** $b \in (-\infty; -1/(2\sqrt{2})] \cup [-1/4; 1/4] \cup \cup [1/(2\sqrt{2}); +\infty)$. **82.** $a \in (-1/3; 3/10] \cup \{1\}$. **83.** а) $2+\sqrt{2}$, б) $(-\infty; 2-\sqrt{2}) \cup \cup \{1\} \cup (2+\sqrt{2}; +\infty)$.

§1.6. Выделение полных квадратов и неотрицательных выражений

При решении данных задач необходимо помнить формулы возведения в квадрат для нескольких слагаемых:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$
$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Отсюда легко заметить (и доказать при помощи математической индукции), что при возведении в квадрат выражения $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ в итоге получим сумму всех квадратов a_k^2, $k = 1, 2, \ldots, n$, и всех возможных попарных произведений $2a_k a_l$, $1 \leqslant k < l \leqslant n$, $k, l \in \mathbb{Z}$, т. е справедлива общая формула

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \cdot \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} a_k a_l.$$

Пример 18. Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$9a^2 + \log_2^2 x + 3\arccos(x-1) - (3a-1)\log_2 x^2 - 6a + 1 = 0.$$

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$9a^2 + \log_2^2 x + 3\arccos(x-1) - (3a-1)\log_2 x^2 - 6a + 1 = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \log_2^2 x - 2\cdot(3a-1)\log_2 x + 9a^2 - 6a + 1 + 3\arccos(x-1) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \log_2^2 x - 2\cdot(3a-1)\log_2 x + (3a-1)^2 + 3\arccos(x-1) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\log_2 x - 3a + 1)^2 + 3\arccos(x-1) = 0.$$

Но поскольку функции $(\log_2 x-3a+1)^2$ и $3\arccos(x-1)$ неотрицательные, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\log_2 x-3a+1=0,\\ 3\arccos(x-1)=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=2/3,\\ x=2.\end{cases}$$

Ответ. Если $a=2/3$, то $x=2$; при других a решений нет.

Пример 19 (биологический факультет, 1995, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^2-6|x|+a)^2+10(x^2-6|x|+a)+26=\cos(16\pi/a)$$

имеет ровно два корня.

Решение. Исходное уравнение равносильно следующему:

$$(x^2-6|x|+a)^2+2\cdot 5(x^2-6|x|+a)+25+1-\cos(16\pi/a)=0 \iff$$
$$\iff (x^2-6|x|+a+5)^2+(1-\cos(16\pi/a))=0.$$

Функции $(x^2-6|x|+a+5)^2$ и $1-\cos(16\pi/a)$ неотрицательные, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}x^2-6|x|+a+5=0,\\ 1-\cos(16\pi/a)=0\end{cases}\iff\begin{cases}(|x|-3)^2=4-a,\\ a=8/n,\quad n\in\mathbb{Z}\end{cases}\iff$$
$$\iff\begin{cases}a\leqslant 4,\\ |x|=3\pm\sqrt{4-a},\\ a=8/n,\quad n\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Уравнение $|x|=3\pm\sqrt{4-a}$ имеет ровно два корня, только если $\sqrt{4-a}=0$, либо $3-\sqrt{4-a}<0$, т. е. либо $a=4$, либо $a<-5$. Следовательно, значения параметра a должны принадлежать множеству $(-\infty;-5)\cup\{4\}$. Отсюда с учётом равенства

$$a=8/n,\quad n\in\mathbb{Z}\iff a=\pm 8,\pm 4,\pm 8/3,\ldots$$

находим два значения параметра $a=4$, $a=-8$, принадлежащие множеству $(-\infty;-5)\cup\{4\}$.

Ответ. При $a=4$, $a=-8$.

Задача 84 (факультет почвоведения (май), 1995, № 5)**.** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$$

не имеет решений.

Задача 85 (ИСАА, 1994, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a^2x^2 + 2a(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{x - 2} = 2\sqrt{2} - 3,$$

имеет решение.

Задача 86 (физический факультет (март), 1999, № 5 (8))**.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - |y + 2| = 0, \\ 2\sqrt{y^2 + 4y + 4} + \sqrt{x^2 - x - 2} = 0. \end{cases}$$

Задача 87 (химический факультет (июль), 1995, № 5)**.** Решите систему

$$\begin{cases} 2^{-x}y^4 - 2y^2 + 2^x \leqslant 0, \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0. \end{cases}$$

Задача 88 (филологический факультет, 1978, № 2)**.** Число α подобрано так, что уравнение

$$\sqrt{x - \sqrt{3}} + \alpha^2x^2 + 2\alpha x(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 6\sqrt{2} - 9$$

имеет решение. Найдите это решение.

Задача 89 (психологический факультет, 1979, № 5)**.** Найдите все тройки целых чисел $(x; y; z)$, для которых выполняется соотношение

$$5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30.$$

Задача 90 (биологический факультет, 1995, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a) + 37 = \cos(18\pi/a)$$

имеет ровно два решения.

Задача 91 (геологический факультет, 1998, № 8)**.** При каких значениях a уравнение

$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2-1}{x-2a}\right|+x^2-2x+1=0$$

имеет хотя бы одно решение?

Задача 92 (высшая школа бизнеса (апрель), 2003, № 7)**.** Решите уравнение

$$(x-1)^6(\sin 4x+\sin 4)^{1/6}+(x+1)^6(\sin 2-\sin 2x)^{1/6}=0.$$

Задача 93 (экономический факультет (отделение менеджмента), 1999, № 6)**.** Для каждого значения b найдите все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$b\sin 2y+\log_4(x\sqrt[8]{1-4x^8})=b^2.$$

Задача 94 (экономический факультет (отделение менеджмента), 1999, № 6)**.** Для каждого значения a найдите все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$a\cos 2x+\log_2(y\sqrt[12]{1-2y^{12}})=a^2.$$

Задача 95 (геологический факультет, 1990, № 5)**.** Найдите все пары действительных чисел a и b, при которых уравнение

$$(3x-a^2+ab-b^2)^2+(2x^2-a^2-ab)^2+x^2+9=6x$$

имеет хотя бы одно решение x.

Задача 96 (экономический факультет (отделение экономики), 2005, № 6 (7))**.** Найдите все рациональные решения уравнения

$$\sqrt{y\cdot(x+1)^2-x^2+x+1}+\log^2_{|y+2|/21}\cos^2\pi y=0.$$

Задача 97 (химический факультет (весна), 1998, № 6)**.** При каких a уравнение

$$\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x+\\
+\left(\sqrt{x^2-3ax+8}-\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x=2(\sqrt{2})^x$$

имеет единственное решение?

Задача 98 (механико-математический факультет, 1989, № 6)**.** Найдите наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

Задача 99 (биологический факультет и факультет фундаментальной медицины, 1998, № 5)**.** Найдите все решения системы

$$\begin{cases} \cos 10x - 2\sin 5x \geqslant 3\cdot 4^t - 3\cdot 2^{t+2} + 27/2, \\ \sqrt{(2-\sqrt{3})^{4t} + (2+\sqrt{3})^{4t} + 2} + 14\log_2(\cos 10x) + 6\cos 5x \geqslant (2t+1)^{1,5}. \end{cases}$$

Задача 100 (факультет ВМиК (июль), 2003, № 5 (6))**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 2^{x+y} \leqslant \dfrac{108\alpha - 161}{2\alpha - 3}, \\ 5\cdot 2^{x+y} - 9\cdot 4^y \geqslant 54 \end{cases}$$

имеет решение.

Задача 101 (механико-математический факультет (июль), 1996, № 6)**.** При каких значениях параметра a уравнение

$$(x^2 - x + a^2 + 2)^2 = 4a^2(2x^2 - x + 2)$$

имеет ровно три различных решения?

Задача 102 (химический факультет (весна), 2001, № 6)**.** Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x - 2a(\sin x + \sin 2x + \sin 3x) + \cos x - \cos 3x + 2a^2 = 0.$$

Ответы. **84.** $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **85.** $a = (1-\sqrt{2})/2$, $x = 2$. **86.** $x = -1$, $y = -2$. **87.** $x = 0$, $y = \pm 1$. **88.** $x = \sqrt{3}$. **89.** $(1; 5; 0)$, $(1; -5; 0)$, $(-1; 5; 0)$, $(-1; -5; 0)$. **90.** $a = -3$, $a = 9$. **91.** $a = 0$, $a = 1$. **92.** $x = -1$, $-1 + \pi/2 + 2\pi n/3$, $n \in \mathbb{Z}$. **93.** При $b = -1/2$ решение $(1/\sqrt[8]{8}; -\pi/4 + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$; при $b = 1/2$ решение $(1/\sqrt[8]{8}; \pi/4 + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$; при $b \neq \pm 1/2$ решений нет. **94.** При $a = -1/2$ решение $(\pi/2 + \pi k; 1/\sqrt[8]{2})$, $k \in \mathbb{Z}$; при $a = 1/2$ решение $(\pi k; 1/\sqrt[8]{2})$, $k \in \mathbb{Z}$; при $a \neq \pm 1/2$ решений нет. **95.** $(3; 3)$, $(-3; -3)$, $(2\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3}; -\sqrt{3})$. **96.** $(x; y) = (-2/3; 1)$, $(-1 - 1/(l-1); l^2 + l - 1)$, $(-1 + 1/(l+2); l^2 + l - 1)$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \neq -5, -2, 1, 4$. **97.** $a \in (-2\sqrt{6}/3; 2\sqrt{6}/3)$. **98.** $x = -\sqrt{7/5}$. **Указание.** Выделите полный квадрат сначала по переменной z. **99.** $t = 1$, $x = -\pi/30 + 2\pi n/5$, $n \in \mathbb{Z}$. **100.** $\alpha \in (3/2; +\infty)$. **Указание.** Введите обозначение $u = 2^x$, $v = 2^y$. Вычтите из первого неравенства второе и докажите, что при полученном ограничении на α всегда существует решение. **101.** $a = \pm\sqrt{2}$, $\pm(\sqrt{15} + 1)/4$. **102.** Если $a = 0$, то $x = \pi m$, $2\pi n/3$, $m, n \in \mathbb{Z}$; при $a \neq 0$ решений нет.

§1.7. Разложение на множители

Для разложения на множители мы выделим два основных способа.

A. Удачная группировка слагаемых.

B. Деление многочлена на угаданный корень.

Опишем деление алгебраического многочлена

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

на одночлен $x - x_0$. Сначала разберём алгоритм деления, называемый *схемой Горнера.*

I. Пусть многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ нужно разделить на $x - a$, т. е. представить в виде

$$P_n(x) = (x - a)Q_{n-1}(x) + R,$$

где R — остаток, а $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$ — многочлен. Коэффициенты b_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и остаток R удобно вычислять при помощи таблицы

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	b_1	b_0	R

где

$$\begin{aligned}
&b_{n-1} = a_n;\\
&b_{n-2} = a_{n-1} + a \cdot b_{n-1};\\
&b_{n-3} = a_{n-2} + a \cdot b_{n-2};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_0 = a_1 + a \cdot b_1;\\
&R = a_0 + a \cdot b_0.
\end{aligned}$$

II. Опишем более общий способ деления многочлена на произвольный многочлен (в том числе и на одночлен $x - x_0$). Для этого рассмотрим пример деления многочлена $ax^4 + x^3 + (2a + 3a^3)x^2 + 2x + 6a^3$ на многочлен $x^2 + 2$. Будем действовать по аналогии с обычным делением целых чисел. Сначала подберём одночлен так, чтобы при умножении его на $x^2 + 2$ получился многочлен, имеющий старший коэффициент, равный ax^4. Очевидно, это ax^2. Вычтем из исходного многочлена многочлен $ax^2(x^2 + 2)$ и получим

$$ax^4 + x^3 + (2a + 3a^3)x^2 + 2x + 6a^3 - ax^4 - 2ax^2 = x^3 + 3a^3x^2 + 2x + 6a^3.$$

Снова подбираем одночлен так, чтобы при его умножении на x^2+2 получился многочлен со старшим коэффициентом x^3. Этот одночлен равен x. Вычтем из $x^3+3a^3x^2+2x+6a^3$ многочлен x^3+2x:

$$x^3+3a^3x^2+2x+6a^3-x^3-2x=3a^3x^2+6a^3.$$

Наконец, подбираем одночлен так, чтобы при его умножении на x^2+2 получился многочлен со старшим коэффициентом, равным $3a^3x^2$. Этот одночлен равен $3a^3$. Разность $3a^3x^2+6a^3$ и $3a^3(x^2+2)$ равна 0. Это означает, что $ax^4+x^3+(2a+3a^3)x^2+2x+6a^3=(ax^2+x+3a^3)(x^2+2)$. Эти вычисления удобно записать в виде деления уголком:

$$\begin{array}{rllllll|l}
- & ax^4 & +\,x^3 & +\,(2a+3a^3)x^2 & +\,2x & +\,6a^3 & & x^2\ \ +\,2 \\ \cline{8-8}
 & ax^4 & +\,0 & +\,2ax^2 & & & & ax^2+x+3a^3 \\ \cline{2-4}
 & - & x^3 & +\,3a^3x^2 & +\,2x & & & \\
 & & x^3 & +\,0 & +\,2x & & & \\ \cline{3-5}
 & & - & 3a^3x^2 & +\,0 & +\,6a^3 & & \\
 & & & 3a^3x^2 & +\,0 & +\,6a^3 & & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Пример 20 (психологический факультет, 2001, № 5)**.** При каждом значении параметра a решите неравенство

$$ax^4+x^3+(2a+3a^3)x^2+2x+6a^3>0.$$

Решение. Неравенство можно представить в виде (см. также деление, приведённое выше)

$$\begin{gathered}
ax^4+x^3+(2a+3a^3)x^2+2x+6a^3>0 \iff \\
\iff x^2(ax^2+x+3a^3)+2(ax^2+x+3a^3)>0 \iff \\
\iff (x^2+2)(ax^2+x+3a^3)>0.
\end{gathered}$$

Поскольку для любого действительного x справедливо неравенство $x^2+2>0$, исходное неравенство эквивалентно следующему:

$$ax^2+x+3a^3>0.$$

Данное неравенство было решено в примере 16.

Ответ. При $a\leqslant -1/\sqrt[4]{12}$ решений нет;
если $-1/\sqrt[4]{12}<a<0$, то $x\in\left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a};\frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right)$;
если $a=0$, то $x\in(0;+\infty)$;
если $0<a\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a};+\infty\right)$;
если $a>1/\sqrt[4]{12}$, то $x\in(-\infty;+\infty)$.

Пример 21 (факультет ВМиК (апрель), 2001, №5 (6))**.** Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$3a-1-(8a-5)\cdot 3^{-2\sqrt{-\log_{81}(x^2+6x+9)}} \leqslant 3(a+2)\cdot|x+3|^{2\sqrt{\log_{|x+3|}(1/9)}}.$$

Решение. Перепишем исходное неравенство в следующем виде:

$$3a-1-(8a-5)\cdot 3^{-2\sqrt{-\log_9|x+3|}} \leqslant 3(a+2)\cdot|x+3|^{2\sqrt{-\log_{|x+3|}9}}.$$

Найдём ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases}|x+3|>0,\\ |x+3|\neq 1,\\ \log_9|x+3|\leqslant 0\end{cases} \iff 0<|x+3|<1.$$

Заметим, что

$$|x+3|^{2\sqrt{-\log_{|x+3|}9}} = 9^{2\sqrt{-\log_{|x+3|}9}\cdot\log_9|x+3|} =$$
$$= 9^{-2\frac{-\log_9|x+3|}{\sqrt{-\log_9|x+3|}}} = 9^{-2\sqrt{-\log_9|x+3|}} = \left(3^{-2\sqrt{-\log_9|x+3|}}\right)^2.$$

Введём обозначение $t = 3^{-2\sqrt{-\log_9|x+3|}}$. Найдём ОДЗ относительно переменной t:

$$0<|x+3|<1 \iff 0<-\log_9|x+3|<+\infty \iff$$
$$\iff 0<t=3^{-2\sqrt{-\log_9|x+3|}}<1.$$

Тогда исходное неравенство с учётом ОДЗ примет вид

$$\begin{cases}3(a+2)t^2+(8a-5)t-(3a-1)\geqslant 0,\\ 0<t<1.\end{cases}$$

Решим данную систему. Для $a=-2$ имеем

$$\begin{cases}-21t+7\geqslant 0,\\ 0<t<1\end{cases} \iff t\in(0;1/3].$$

Для $a\neq -2$ найдём корни квадратного уравнения

$$3(a+2)t^2+(8a-5)t-(3a-1)=0,$$

например при помощи дискриминанта, $t = 1/3$, $t = (1-3a)/(a+2)$. Отсюда при $a \neq -2$ получаем

$$\begin{cases} 3(a+2)\,(t-1/3)\left(t - \dfrac{1-3a}{a+2}\right) \geqslant 0, \\ 0 < t < 1. \end{cases}$$

Используя методы §1.1, мы решаем последнюю систему относительно переменной t.

Если $a \leqslant -1/4$, то $t \in (0; 1/3]$; если $a \in (-1/4; 1/10)$, то $t \in (0; 1/3] \cup \cup [(1-3a)/(1-3a); 1)$; если $a = 1/10$, то $t \in (0; 1)$; если $a \in (1/10; 1/3)$, то $t \in (0; (1-3a)/(1-3a) \cup [1/3; 1)$; если $a \geqslant 1/3$, то $x \in [1/3; 1)$.

Чтобы получить окончательный ответ, перейдём обратно к переменной x.

Ответ. Если $a \leqslant -1/4$, то $x \in [-3-1/\sqrt{3}; -3) \cup (-3; -3+1/\sqrt{3}]$; если $a \in (-1/4; 1/10)$, то $x \in (-4; -3-f_a] \cup [-3-1/\sqrt{3}; -3) \cup (-3; -3+1/\sqrt{3}] \cup \cup [-3+f_a; -2)$; если $a = 1/10$, то $x \in (-4; -3) \cup (-3; -2)$; если $a \in (1/10; 1/3)$, то $x \in (-4; -3-1/\sqrt{3}] \cup [-3-f_a; -3) \cup (-3; -3+f_a] \cup [-3+1/\sqrt{3}; -2)$; если $a \geqslant 1/3$, то $x \in (-4; -3-1/\sqrt{3}] \cup [-3+1/\sqrt{3}; -2)$, где

$$f_a = ((1-3a)/(a+2))^{\log_3 \sqrt{(a+2)/(1-3a)}}.$$

Задача 103 (ИСАА, 1993, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2+2|x-a| \geqslant a^2$ справедливо при всех действительных x.

Задача 104 (ЕГЭ (демо), 2002, № С2)**.** Найдите наибольшее значение a, при котором уравнение $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен -2.

Задача 105 (физический факультет (май), 2000, № 7)**.** Для каждого допустимого значения a решите неравенство

$$a^x(a-1)^x - 2a^{x+1} - (a-1)^x + 2a \leqslant 0$$

и найдите, при каких значениях a множество решений неравенства представляет собой промежуток длины 2.

Задача 106 (ЕГЭ, 2003, № С4)**.** Найдите все значения a, при которых область определения функции

$$y = \left((\sqrt{a})^{2x+1} + \sqrt{x}a^4 - x^{1/2+x\log_x a} - (\sqrt{a})^9\right)^{1/2}$$

содержит два или три целых числа.

Задача 107 (физический факультет (июль), 2002, № 7)**.** При каких значениях a неравенство

$$(x^2-(a+8)x-6a^2+24a)\sqrt{3-x}\leqslant 0$$

имеет единственное решение.

Задача 108 (физический факультет (май), 2002, № 7)**.** Для каждого значения a решите неравенство

$$(x^2+2x-a^2-4a-3)(\sin x+2x)>0.$$

Задача 109 (физический факультет (июль), 2003, № 7)**.** Для каждого значения a решите неравенство

$$\frac{x^2\cdot 2^{|2a-1|}-2x+1}{x^2-(a-2)x-2a}>0.$$

Задача 110 (ИСАА, 2005, № 7 (7))**.** Фигура на плоскости $(x;y)$ состоит из всех точек, через которые не проходит ни одна из кривых, задаваемых соотношением

$$(p^4+4p^2+16)^2+(x^2-y^2)^2=16(p^3+4p)xy+2(p^4+12p^2+16)(x^2+y^2)$$

при различных действительных значениях p. Найдите длину линии, ограничивающей эту фигуру.

Задача 111 (экономический факультет (отделение политической экономии), 1984, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства

$$x^3\sqrt{a^3+a^2-a-1}-x^2\sqrt{a^3+a^2}+x\sqrt{a^4-a^2}-a^2\leqslant 0$$

удовлетворяет условию $a\leqslant x\leqslant 2a+1$.

Задача 112 (факультет ВМиК (апрель), 2001, № 5 (6))**.** Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$2a+3-2(a-1)\cdot 2^{-2\sqrt{2\log_{1/2}|x-4|}}\geqslant(3a+7)\cdot(x^2-8x+16)^{\sqrt{-(1/2)\log_{|x-4|}2}}.$$

Задача 113 (химический факультет (май), 2002, № 6)**.** При каждом значении параметра a решите уравнение

$$\sqrt{-x^3+(a-1)x^2+(a-1)x+a}=2x^2+3x+2-a.$$

Задача 114 (психологический факультет, 2001, № 5)**.** При каждом значении параметра a решите неравенство

$$2ax^4 + 8x^3 + (a + 2a^3)x^2 + 4x + a^3 > 0.$$

Задача 115 (факультет почвоведения (май), 1999, № 6)**.** Найдите все значения параметра β, при которых уравнение

$$(x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) = \beta$$

относительно x имеет ровно три корня.

Задача 116 (механико-математический факультет, 1987, № 5)**.** Найдите все пары значений параметров a и b, для каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x + y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений $(x; y)$.

Задача 117 (химический факультет и высший колледж наук о материалах (июль), 2001, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^3 - (a + 3)x^2 + (3a + 2)x - 2a \geqslant 0, \\ x^3 - (a + 3)x^2 + 3ax \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 118 (биологический факультет и факультет фундаментальной медицины, 1999, № 5)**.** Найдите все такие значения $y > 1/2$, что неравенство

$$16y^3 + 6y^3x - 4y^3x^2 - 50y^2 - 11y^2x + 10y^2x^2 + \\ + 52y + 4yx - 8yx^2 - 18 + x + 2x^2 > 0$$

выполняется при всех x из интервала $1 < x < 2y$.

Задача 119 (механико-математический факультет (май), 1996, № 6)**.** При каком значении параметра a сумма различных корней уравнения

$$\cos x - \sin 2x + \sin 4x = a(\operatorname{ctg} x + 2\cos 3x),$$

принадлежащих отрезку $[3\pi/4; 22\pi/3]$, максимальна?

Задача 120 (факультет ВМиК (апрель), 2003, № 5 (6))**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2^{3x^2+2y^2+8x-4y+8} + 2^{x^2+4y+5} \leqslant 33 \cdot 2^{2x^2+y^2+4x+4}, \\ x^2+y^2-8x+8y=a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, но среди этих решений нет удовлетворяющих условию $x+y=0$.

Задача 121 (географический факультет (июль), 1999, № 4)**.** Найдите все значения параметра a, при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x + 6a\cos x - \sin x - 3a = 0$$

найдутся два корня, разница между которыми равна $3\pi/2$.

Задача 122 (механико-математический факультет (март), 1999, № 5)**.** Найдите все значения параметра a из промежутка $[-2;1]$, при каждом из которых расстояние на числовой оси между любыми различными корнями уравнения

$$\sin 2x + |2a+1|\sin x + |a| = 2|a|\cos x + \sin x + |2a^2+a|$$

не меньше чем $\pi/2$.

Задача 123 (механико-математический факультет (март), 2002, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$6\sin\left(2x - \frac{11}{12}\pi a\right) + 6\sin\left(\frac{11}{12}\pi a\right) + 3a^3 - 7a^2 + 3a + 1 =$$
$$= 2(3a^2-4a-1)\cos\left(x - \frac{11}{12}\pi a\right) + 6(a-1)\sin x,$$

будучи отложенными на тригонометрической окружности, образуют на ней ровно четыре точки, причём эти точки являются вершинами трапеции.

Ответы. **103.** $a \in [-1;1]$. **104.** $a = 7$. **105.** Если $1 < a < 2$, то $x \in (-\infty; \log_{a-1} 2a] \cup [0;+\infty)$; если $a = 2$, то $x \in [0;+\infty)$; если $a > 2$, то $x \in [0; \log_{a-1} 2a]$. При $a = 2+\sqrt{3}$ множество решений — промежуток длины 2. **106.** $a \in (1;3] \cup [5;7)$. **107.** $a \in [1;5/2]$. **108.** Если $a \leqslant -3$, то $x \in (a+1;0) \cup$ $\cup (-(a+3);+\infty)$; если $a \in (-3;-2)$, то $x \in (a+1;-(a+3)) \cup (0;+\infty)$; если $a = -2$, то $x \in (0;+\infty)$; если $a \in (-2;-1)$, то $x \in (-(a+3);a+1) \cup (0;+\infty)$;

если $a \geqslant -1$, то $x \in (-(a+3);0) \cup (a+1;+\infty)$. **109.** Если $a < -2$, то $x \in (-\infty;a) \cup (-2;+\infty)$; если $a=-2$, то $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$; если $a \in (-2;1/2)$, то $x \in (-\infty;-2) \cup (a;+\infty)$; если $a = 1/2$, то $x \in (-\infty;-2) \cup (1/2;1) \cup (1;+\infty)$; если $a > 1/2$, то $x \in (-\infty;-2) \cup (a;+\infty)$. **110.** $12\sqrt{2}$. **Указание.** Введите новые переменные $u=(x+y)^2$, $v=(x-y)^2$. **111.** $a=1$, $a=\sqrt{2}$. **Указание.** Найдите ОДЗ по a для неравенства и для данных значений параметра a решите его. **112.** Если $a \leqslant -3/2$, то $x \in (3;4-1/\sqrt{2}] \cup \cup [1/\sqrt{2};5)$; если $a \in (-3/2;-1)$, то $x \in (3;4-1/\sqrt{2}] \cup [4-f_a;4) \cup (4;4+f_a] \cup \cup [4+1/\sqrt{2};5)$; если $a=-1$, то $x \in (3;4) \cup (4;5)$; если $a \in (-1;-2/3)$, то $x \in (3;4-f_a] \cup [4-1/\sqrt{2};4) \cup (4;4+1/\sqrt{2}] \cup [4+f_a;5)$; если $a \geqslant -2/3$, то $x \in [4-1/\sqrt{2};4) \cup (4;4+1/\sqrt{2}]$, где $f_a = ((2a+3)/(1-a))^{\log_2 \sqrt{(1-a)/(2a+3)}}$. **113.** При $a<0$ решений нет, при $a=0$ решение одно $x=-1$, при $a>0$ решения $x=-1\pm\sqrt{a}$. **114.** При $a \leqslant -\sqrt{2}$ решений нет; если $-\sqrt{2}<a<0$, то $x \in ((-2+\sqrt{4-a^4})/a;(-2-\sqrt{4-a^4})/a)$; если $a=0$, то $x \in (0;+\infty)$; если $0<a\leqslant\sqrt{2}$, то $x \in (-\infty;(-2-\sqrt{4-a^4})/a) \cup ((-2+\sqrt{4-a^4})/a;+\infty)$; если $a>\sqrt{2}$, то $x \in (-\infty;+\infty)$. **115.** $\beta = 9/16$. **116.** $(1;-2)$; $(-1;-2)$; $(t;2)$, $t \in \mathbb{R}$. **117.** $[3;+\infty)$. **118.** $y \in [5/6;1) \cup (1;3/2]$. **Указание.** Запишите уравнение как квадратное (относительно переменной x). **119.** $a=-\sqrt{3}/2$. **120.** $a \in (44-24\sqrt{2};44+24\sqrt{2})$. **Указание.** Разделите обе части первого неравенства на 2^{x^2+4y} и затем разложите на множители. **121.** $a=\pm 1/6$, $a=\pm\sqrt{2}/6$. **122.** $a \in [-1-1/\sqrt{2};-1]$, $a=-2,0,1,1/\sqrt{2}$. **123.** $a=1/3$, $4/3$, $-6/11$, $6/11$, $18/11$.

§1.8. Теорема Виета для уравнения высокого порядка

Определение 1.8.1. Функция вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

называется *алгебраическим многочленом степени* n. В случае $n=2$ уравнение $f(x)=0$ будем называть *квадратным* или уравнением второго порядка. В случае $n=3$ уравнение $f(x)=0$ будем называть *кубическим* или уравнением третьего порядка. В случае $n=4$ уравнение $f(x)=0$ будем называть уравнением четвёртого порядка.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения (1.4). Тогда

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0 \iff$$
$$\iff a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = 0.$$

Отсюда, раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, приходим к следующим формулам:

$$\begin{gathered}
x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_{n-1}/a_n, \\
(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_1x_n) + \\
+ (x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_2x_n) + \ldots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}/a_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\
\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} = (-1)^k a_{n-k}/a_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\
x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n a_0/a_n,
\end{gathered}$$

которые носят название формул *Виета.*

I. Для квадратного уравнения $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $a_2 \neq 0$, где x_1, x_2 — корни уравнения (случай $D \geqslant 0$), общие формулы принимают вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1/a_2, \\ x_1x_2 = a_0/a_2. \end{cases}$$

II. Для кубического уравнения $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $a_3 \neq 0$, где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения, общие формулы принимают вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a_2/a_3, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a_1/a_3, \\ x_1x_2x_3 = -a_0/a_3. \end{cases}$$

III. Для уравнения четвёртой степени $a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, $a_4 \neq 0$, где x_1, x_2, x_3, x_4 — корни уравнения, общие формулы принимают вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a_3/a_4, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = a_2/a_4, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 = -a_1/a_4, \\ x_1x_2x_3x_4 = a_0/a_4. \end{cases}$$

Пример 22 (социологический факультет, 2003, № 6)**.** Определите все значения параметра a при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

Решение. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда корни связаны соотношением $x_2 = qx_1$, $x_3 = q^2x_1$. По теореме Виета $x_1x_2x_3 = 64$ или $(qx_1)^3 = 64$, откуда мы получаем $x_2 = 4$. Запишем теорему Виета для $x_1 = q^{-1}x_2 = 4q^{-1}$, $x_2 = 4$, $x_3 = qx_2 = 4q$.

$$\begin{cases} 4(q^{-1} + 1 + q) = -(a^2 - 9a), \\ 16(q + 1 + q^{-1}) = 8a, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Заметим, что $a \neq 0$, так как иначе уравнение $q+1+q^{-1} = 0$ решений не имеет и, следовательно, этот случай противоречит условию существования трёх различных корней. Поделив первое уравнение на второе, получаем

$$2 = -(a - 9) \iff a = 7.$$

Теперь из второго уравнения находим

$$q + 1 + q^{-1} = 7/2 \iff q^2 - (5/2)q + 1 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} q = 2, \\ q = 1/2. \end{array}\right.$$

Пусть $q = 2$. Тогда $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$. Пусть $q = 1/2$. Тогда $x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$. В обоих случаях получаем, что корнями исходного уравнения являются числа 2, 4, 8.

Заметим, что после нахождения корня $x_2 = 4$ уравнение можно решить проще: подставим $x = x_2 = 4$ в исходное уравнение

$$4^3 + 16(a^2 - 9a) + 32a - 64 = 0 \iff a^2 - 7a = 0.$$

Получаем два значения параметра a: $a = 0$, $a = 7$. Как и ранее, доказываем, что случай $a = 0$ невозможен. Для $a = 7$ уравнение принимает вид

$$x^3 - 14x + 56x - 64 = 0 \iff (x - 4)(x^2 - 10x + 16) = 0 \iff$$
$$\iff (x - 4)(x - 2)(x - 8) = 0.$$

Отсюда получаем искомый ответ.

Ответ. $a = 7$, корни уравнения 2, 4, 8.

Пример 23 (психологический факультет, 1992, №4). Найдите все значения параметров a и b, при которых найдутся два различных корня уравнения $x^3 - 5x^2 + 7x = a$, которые будут также корнями уравнения $x^3 - 8x + b = 0$.

Решение. Решим задачу двумя способами.

I. Пусть x_1, x_2, x_3 — решения уравнения[1] $x^3-5x^2+7x=a$, причём $x_1\neq x_2$. Пусть x_1, x_2, x_3' — решения уравнения $x^3-8x+b=0$.

Так как корни x_1, x_2 удовлетворяют сразу двум уравнениям

$$x^3-5x^2+7x=a \qquad \text{и} \qquad x^3-8x+b=0,$$

они же удовлетворяют уравнению (левое часть которого разность двух полиномов)

$$-5x^2+15x-(a+b)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2-3x+\frac{a+b}{5}=0.$$

По теореме Виета для квадратного уравнения находим

$$x_1+x_2=3, \tag{1.5}$$
$$x_1x_2=(a+b)/5. \tag{1.6}$$

Запишем теорему Виета для уравнений $x^3-5x^2+7x=a$ и $x^3-8x+b=0:$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5,\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=7,\\ x_1x_2x_3=a,\\ x_1+x_2+x_3'=0,\\ x_1x_2+x_1x_3'+x_2x_3'=-8,\\ x_1x_2x_3'=-b \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x_3=2,\\ (a+b)/5+3x_3=7,\\ \dfrac{a+b}{5}x_3=a,\\ 3+x_3'=0,\\ (a+b)/5+3x_3'=-8,\\ \dfrac{a+b}{5}x_3'=-b. \end{cases}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (1.5)–(1.6). Далее мы находим $x_3=2$, $(a+b)/5=1$, $x_3'=-3$, $a=\frac{a+b}{5}x_3=x_3=2$, $b=-\frac{a+b}{5}x_3'= =-x_3'=3$.

Проверка. Для $a=2$, $b=3$ исходные уравнения принимают вид

$$x^3-5x^2+7x-2=0,$$
$$x^3-8x+3=0.$$

---

[1] Из существования двух корней x_1, x_2 для многочлена третьей степени

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

вытекает существование третьего корня. Действительно, достаточно исходный многочлен разделить на $(x-x_1)(x-x_2)$.

Из соотношений (1.5)–(1.6) можем предположить, что $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ — корни уравнений. Действительно, подстановкой убеждаемся в справедливости предположения.

Приведём решение без использования теоремы Виета.

II. Пусть x_1 и x_2 — два различных решения уравнения

$$x^3 - 5x^2 + 7x = a.$$

Для определенности будем считать, что $x_1 > x_2$. Поскольку x_1 и x_2 удовлетворяют уравнению $x^3 - 5x^2 + 7x = a$, мы получаем

$$\begin{cases} x_1^3 - 5x_1^2 + 7x_1 = a, \\ x_2^3 - 5x_2^3 + 7x_2 = a. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе (и учитывая, что $x_1 - x_2 > 0$), получаем

$$(x_1^3 - x_2^3) - 5(x_1^2 - x_2^2) + 7(x_1 - x_2) = 0 \iff$$
$$\iff (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 5(x_1 + x_2) + 7) = 0 \iff$$
$$\iff (x_1 + x_2)^2 - 5(x_1 + x_2) - x_1x_2 + 7 = 0.$$

Из того, что x_1 и x_2 удовлетворяют второму уравнению, т. е.

$$\begin{cases} x_1^3 - 8x_1 + b = 0, \\ x_2^3 - 8x_2 + b = 0, \end{cases}$$

вытекает, что

$$(x_1^3 - x_2^3) - 8(x_1 - x_2) = 0 \iff$$
$$\iff (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 8) = 0 \iff$$
$$\iff (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 - 8 = 0.$$

Таким образом, x_1 и x_2 удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (x_1 + x_2)^2 - 5(x_1 + x_2) - x_1x_2 + 7 = 0, \\ (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 - 8 = 0 \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} -5(x_1 + x_2) + 15 = 0, \\ (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 - 8 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1x_2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, x_1 и x_2 удовлетворяют уравнению

$$x^2 - 3x + 1 = 0, \tag{1.7}$$

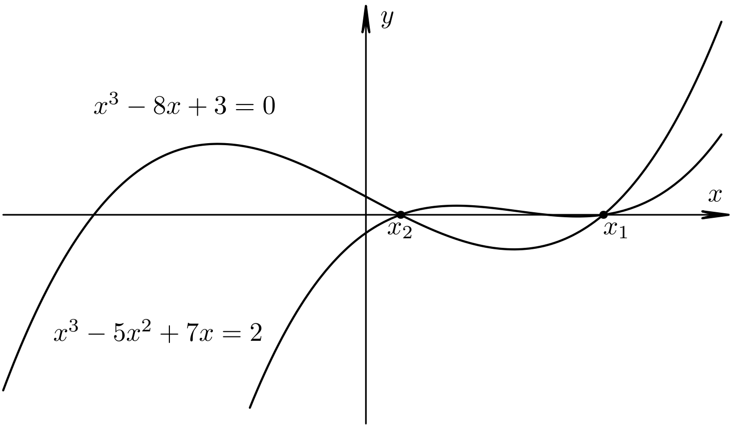

Рис. 1.36

решая которое, находим $x_1 = (3 + \sqrt{5})/2$; $x_2 = (3 - \sqrt{5})/2$. Теперь, используя уравнение (1.7), найдем значение параметра a:

$$a = x_1^3 - 5x_1^2 + 7x_1 = x_1(x_1^2 - 5x_1 + 7) = x_1\big((x_1^2 - 3x_1 + 1) - 2x_1 + 6\big) = \\ = x_1(-2x_1 + 6) = -2(x_1^2 - 3x_1 + 1) + 2 = 2,$$

и параметра b

$$-b = x_1^3 - 8x_1 = x_1\big((x_1^2 - 3x_1 + 1) + 3x_1 - 9\big) = x_1(3x_1 - 9) = \\ = 3(x_1^2 - 3x_1 + 1) - 3 = -3.$$

Ответ. $a = 2$, $b = 3$.

Задача 124 (географический факультет (июль), 2002, № 3 (6))**.** Квадратное уравнение $x^2 - 6px + q = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Числа p, x_1, x_2, q — четыре последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите x_1 и x_2.

Задача 125 (географический факультет (июль), 1993, № 5)**.** При каких значениях a четыре корня уравнения

$$x^4 + (a - 5)x^2 + (a + 2)^2 = 0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии?

Задача 126 (физический факультет (июль), 1993, № 7)**.** Уравнение $ax^2 + bx + 2 = 0$, где $a < 0$, имеет одним из своих корней число $x = 3$. Решите уравнение

$$ax^4 + bx^2 + 2 = 0.$$

Задача 127 (психологический факультет, 1992, № 4)**.** Найдите все значения параметров u и v, при которых найдутся два различных корня уравнения $x(x^2+x-8)=u$, которые будут также корнями уравнения $x(x^2-6)=v$.

Задача 128 (социологический факультет, 2003, № 6)**.** Определите все значения параметра, при каждом из которых три различных корня уравнения $x^3+(a^2-15a)x^2+12ax-216=0$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

Задача 129 (механико-математический факультет, 1972, № 5)**.** Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

$$x^2-(a+b)x+8=0, \quad x^2-b(b+1)x+c=0, \quad x^4-b(b+1)x^2+c=0.$$

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что корни первого уравнения больше единицы. Известно также, что все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения и хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найдите числа a, b, c, если $b>3$.

Ответы. **124.** $(-3;9)$, $(2;4)$. **125.** $a=-5$, $a=-5/13$. **126.** $x=\pm\sqrt{3}$. **127.** $u=6$, $v=4$. **128.** $a=13$, корни уравнения 2, 6, 18. **129.** $a=2$, $b=4$, $c=64$.

§1.9. Задачи на единственность и количество решений

Введём обозначение: $f_a(x)$ означает, что функция $f(x)$ может зависеть от параметра a (или нескольких параметров). Основной темой данного параграфа является разбор следующей задачи.

Задача А. *Найдите все значения параметра a (или нескольких параметров), при которых уравнение (или неравенство) $f_a(x)=0$ ($f_a(x)\leqslant 0$) имеет единственное решение.*

Напомним определение чётности и нечётности функции.

Определение 1.9.1. Если область определения функции $f(x)$ симметрична относительно точки $x=0$ и $f(-x)=f(x)$, то функция $f(x)$ чётная, если $f(-x)=-f(x)$, то функция $f(x)$ нечётная.

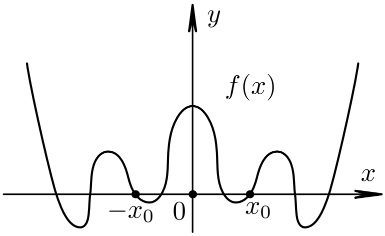

Рис. 1.37. $f(x_0) = f(-x_0) = 0$

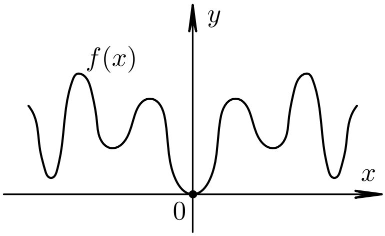

Рис. 1.38. $f(0) = 0$

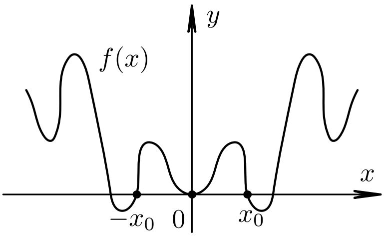

Рис. 1.39. $f(x_0) = f(-x_0) = f(0) = 0$

Пример 24. Функции

$$f_1(x) = |\sin x|,$$
$$f_2(x) = \cos x,$$
$$f_3(x) = x^4 - 3x^2,$$
$$f_4(x) = \frac{\operatorname{tg} x \cdot (7^x - 1)}{7^x + 1}$$

чётные. Для первых трёх это очевидно. Для функции $f_4(x)$ проверим, что она чётная:

$$f_4(-x) = \frac{\operatorname{tg}(-x) \cdot (7^{-x} - 1)}{7^{-x} + 1} = \frac{-\operatorname{tg} x \cdot 7^{-x}\,(1 - 7^x)}{7^{-x}\,(1 + 7^x)} =$$
$$= -\frac{\operatorname{tg} x \cdot (1 - 7^x)}{(1 + 7^x)} = \frac{\operatorname{tg} x \cdot (7^x - 1)}{7^x + 1} = f_4(x).$$

Пусть при решении задачи А функция $f_a(x)$ оказалась чётной. Тогда если x_0 является решением задачи, то и $-x_0$ — решение задачи (см. рис. 1.37), поскольку $f_a(x_0) = f_a(-x_0)$. Следовательно, для единственности решения *необходимо*, чтобы $x_0 = 0$ было решением задачи А (см.

рис. 1.38, 1.39), и *достаточно*, чтобы решений (кроме $x_0 = 0$) больше не было (см. рис. 1.38), таким образом, случай, изображённый на рис. 1.39, мы отбрасываем.

Решая задачу A, мы сначала будем:

1) находить возможные значения параметров из уравнения (неравенства) $f_a(0) = 0$ ($f_a(0) \leqslant 0$), т. е. из необходимого условия единственности;

2) для найденных значений параметров будем проверять, что других решений (кроме $x = 0$) нет, т. е. проверять достаточное условие единственности.

Пример 25 (психологический факультет, 1995, № 5)**.** Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leqslant -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a$$

имеет единственное решение.

Решение. Преобразуем неравенство к общему знаменателю:

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leqslant -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a \iff$$

$$\iff \frac{(a+\cos x)^2 - 2\sqrt{x^2+9}(a+\cos x) + x^2 + 9}{a+\cos x} \leqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{(a+\cos x - \sqrt{x^2+9})^2}{a+\cos x} \leqslant 0.$$

Обозначим

$$f(x) = \frac{(a+\cos x - \sqrt{x^2+9})^2}{a+\cos x}.$$

Поскольку функция $f(x)$ чётная ($f(x) = f(-x)$), для того чтобы исходное неравенство $f(x) \leqslant 0$ имело единственное решение, необходимо, чтобы $x = 0$ было решением неравенства (если x_0 — решение неравенства, то и $-x_0$ является решением в силу чётности функции $f(x)$).A

Таким образом, $(a-2)^2/(a+1) \leqslant 0$, т. е. $a = 2$ либо $a < -1$. Проверим, является ли решение $x = 0$ исходного неравенства единственным при найденных значениях параметра a.

Пусть $a < -1$. Тогда неравенство

$$\frac{(a+\cos x - \sqrt{x^2+9})^2}{a+\cos x} \leqslant 0$$

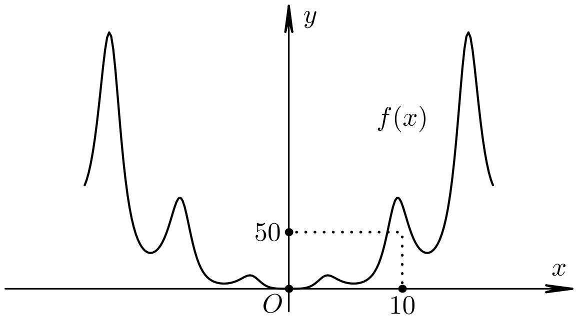

Рис. 1.40. График функции $f(x)$ для $a = 2$

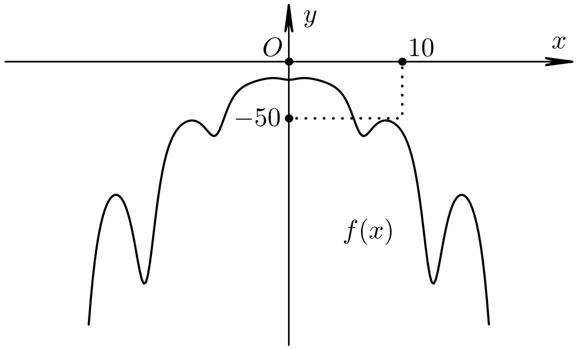

Рис. 1.41. График функции $f(x)$ для $a = -2$

выполнено для всех $x \in \mathbb{R}$, так как для $a < -1$ справедливы

$$(a + \cos x - \sqrt{x^2+9})^2 \geqslant 0, \quad a + \cos x < 0.$$

Пусть $a = 2$. Тогда $2 + \cos x > 0$ для любых $x \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\frac{(2+\cos x - \sqrt{x^2+9})^2}{2+\cos x} \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (2+\cos x - \sqrt{x^2+9})^2 \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2 + \cos x - \sqrt{x^2+9} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 + \cos x = \sqrt{x^2+9}.$$

Но $x = 0$ является единственным корнем уравнения $2+\cos x = \sqrt{x^2+9}$, так как для $x \neq 0$ получаем неверное утверждение

$$3 < \sqrt{x^2+9} = 2 + \cos x \leqslant 3.$$

Ответ. $a = 2$.

Задача 130 (физический факультет (май), 1999, №7). При каких значениях a уравнение $\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$ имеет ровно одно решение на промежутке $[0; 2\pi)$.

Задача 131 (факультет почвоведения (май), 2001, №6). При каких значениях параметра b уравнение $\operatorname{tg}|b| = \log_2(\cos x - |x|)$ имеет ровно один корень?

Задача 132 (механико-математический факультет, 1990, № 4). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет единственное решение.

Задача 133 (психологический факультет, 1995, №5). Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\cos 2x + a \leqslant 2\sqrt{x^2 + 16} - \frac{x^2 + 16}{a + \cos 2x}$$

имеет единственное решение.

Задача 134 (московская школа экономики (июль), 2005, №8 (8)). Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + 1)b = y + \cos 2x, \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 135 (механико-математический факультет, 1990, № 4). Найдите все значения параметра b, при которых уравнение

$$b^2x^2 - b\operatorname{tg}(\cos x) + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

Задача 136 (факультет почвоведения, 1994, № 4). Найдите все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} a + \sin bx \leqslant 1, \\ x^2 + ax + 1 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 137 (ИСАА, 1991, № 6)**.** При каких значениях параметра b система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| - x = b \end{cases}$$

имеет ровно три решения?

Задача 138 (факультет почвоведения, 1995, № 5)**.** При каких значениях параметра b система уравнений

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет два действительных решения?

Задача 139 (химический факультет (июль), 1999, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left| \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} + 2a \right| = a^2 + 1$$

имеет нечётное число решений.

Задача 140 (ИСАА, 1998, № 7)**.** При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3}\,y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3}\,x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

Задача 141 (экономический факультет (отделение планирования и экономической кибернетики), 1987, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 142 (экономический факультет, 1990, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x - 5 = a - 2y + y^2, \\ x^2 + (2 - a - a^2)y^2 = 0, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 143 (факультет государственного управления, 2002, № 6). Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \left(3\sqrt{x|x|} + |y| - 3\right)\left(|x| + 3|y| - 9\right) = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Задача 144 (экономический факультет, 2002, № 6). Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\sqrt[4]{x^2 - 6ax + 10a^2} + \sqrt[4]{3 + 6ax - x^2 - 10a^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt[4]{\sqrt{3}a + 24 - \frac{3}{\sqrt{2}} + |y - \sqrt{2}a^2| + |y - \sqrt{3}a|}$$

имеет единственное решение.

Ответы. 130. $a = -2$, $a = 1$. **131.** $b = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **132.** $a = 0$, $a = 2\sin 1$. **133.** $a = 3$. **134.** $b = 2$. **135.** $b = \operatorname{ctg} 1$. **136.** $a = 2$, $b = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $a = -2$, $b \in \mathbb{R}$. **137.** $b = \sqrt{2}$. **138.** $b \in (-2; 0)$. **139.** $a = \pm 1$. **140.** $a = 2$. **141.** $a = 4/3$. **142.** $a = -3$, $a = -2$. **143.** $a = -4$, 4, 6. **144.** $a = \sqrt{3/2}$.

§1.10. Задачи, решаемые с использованием симметрий

Данный параграф является продолжением предыдущего.

I. В параграфе была рассмотрена симметрия относительно прямой $x = 0$ (понятие чётной функции). Сейчас мы рассмотрим симметрии в более общей ситуации, в частности относительно прямых $x = b$, где b — некоторое заданное число.

При симметрии относительно прямой $x = b$ удобно делать замену $z = x - b$, где b — некоторое заданное число. Тогда в новой переменной функция $f(z) = f(x - b)$ будет чётной: $f(-z) = f(z)$.

II. При большом количестве переменных, например при решении уравнения вида $f(x, y) = 0$, полезно иметь в виду симметрии $f(x, y) = f(y, x)$ (если они присутствуют). Тогда наряду с решением $(x_0; y_0)$ пара $(y_0; x_0)$ тоже будет решением.

Далее решаем так же, как и в предыдущем параграфе.

Пример 26 (филологический факультет, 1984, № 5)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 + 2a, \\ x \geqslant y^2 + 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы, тогда ввиду симметрии $(y_0; x_0)$ тоже будет решением. Следовательно, необходимым условием является равенство $x = y$. Подставив это равенство в систему, получаем

$$x^2 - x + 2a \leqslant 0.$$

Данное неравенство имеет единственное решение, в случае если дискриминант квадратного уравнения обращается в нуль, т. е.

$$D = 1 - 8a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 1/8,$$

и $x = y = 1/2$. Проверим достаточность данного условия. Складывая два неравенства, получаем

$$x + y \geqslant x^2 + y^2 + 1/2 \quad \Longleftrightarrow \quad (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 \leqslant 0.$$

Отсюда замечаем, что решение $x = y = 1/2$ действительно единственное.

Ответ. При $a = 1/8$ система неравенств имеет единственное решение $x = y = 1/2$.

Пример 27 (химический факультет (июль), 2005, № 6 (6))**.** При каких значениях параметра a уравнение

$$|x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right| = a$$

имеет ровно три решения?

Решение. Введём обозначение

$$f(x) = |x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right|.$$

I. Справедливо следующее равенство:

$$\frac{\left(\frac{x+1}{3x-1}\right) + 1}{3 \cdot \left(\frac{x+1}{3x-1}\right) - 1} = \frac{(x+1) + (3x-1)}{3(x+1) - (3x-1)} = \frac{4x}{4} = x.$$

Отсюда следует, что если x_0 — решение уравнения, то и $x_1 = \frac{x_0+1}{3x_0-1}$ тоже является корнем исходного уравнения, так как $f(x_0) = f(x_1)$. Значит, нечётное число решений возможно лишь при условии

$$x_0 = \frac{x_0+1}{3x_0-1} \iff 3x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \iff \left[\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ x_0 &= -1/3, \end{aligned}\right.$$

т. е. когда корни x_0 и x_1 совпадают. Найдём те значения a, которые соответствуют значениям $x_0 = 1$ и $x_0 = -1/3$:

$$a_1 = f(1) = 2, \quad a_2 = f(-1/3) = 2/3.$$

II. Проверим, что при найденных значениях параметра a имеется ровно три решения, а, допустим, не пять. Пусть $a = 2$. Решим уравнение $f(x) = 2$. Для однозначного раскрытия модулей рассмотрим четыре промежутка $(-\infty; -1) \cup [-1; 0] \cup (0; 1/3) \cup (1/3; +\infty)$, на каждом из которых решим уравнение $f(x) = 2$ (см. рис. 1.42).

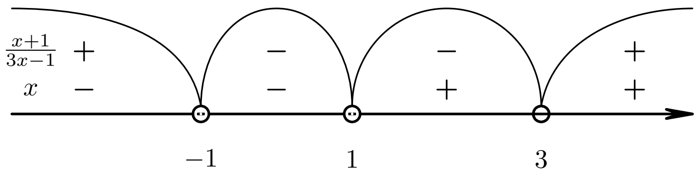

Рис. 1.42.

a. Пусть $x \in (1/3; +\infty)$. Тогда уравнение $f(x) = 2$ принимает вид

$$x + \frac{x+1}{3x-1} = 2 \iff 3x^2 - x + x + 1 = 2(3x-1) \iff$$
$$\iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff x = 1.$$

b. Пусть $x \in (0; 1/3)$. Тогда уравнение $f(x) = 2$ принимает вид

$$x - \frac{x+1}{3x-1} = 2 \iff 3x^2 - x - x - 1 = 2(3x-1) \iff$$
$$\iff 3x^2 - 8x + 1 = 0 \iff x = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}.$$

Интервалу $(0; 1/3)$ принадлежит лишь один корень $x = (4 - \sqrt{13})/3$. Таким образом, мы нашли второй корень уравнения $f(x) = 2$.

c. Пусть $x \in [-1; 0]$. Тогда уравнение $f(x) = 2$ принимает вид

$$-x - \frac{x+1}{3x-1} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x^2 - x + x + 1 = -2(3x-1) \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad 3x^2 + 6x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Но так как $2\sqrt{3}/3 > 1$, ни одно число $-1 \pm 2\sqrt{3}/3$ не принадлежит отрезку $[-1; 0]$.

d. Пусть $x \in (-\infty; -1)$. Тогда уравнение $f(x) = 2$ принимает вид

$$-x + \frac{x+1}{3x-1} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad -3x^2 + x + x + 1 = 2(3x-1) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad 3x^2 + 4x - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}.$$

Лучу $(-\infty; -1)$ принадлежит лишь один корень $x = (-2 - \sqrt{13})/3$. Таким образом, мы нашли третий корень уравнения $f(x) = 2$.

Итак, для случая $a = 2$ мы проверили, что решений действительно ровно три. Аналогично доказывается, что и в случае $a = 2/3$ у уравнения $f(x) = 2$ будет два корня.

Ответ. $a = 2$.

Задача 145 (физический факультет, 1981, №2)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 146 (геологический факультет (отделение общей геологии), 1979, №6 (6))**.** Найдите все значения α, при которых уравнение

$$x^2 + \frac{6x}{\sqrt{\sin\alpha}} + \frac{9\sqrt{3}}{\cos\alpha} + 36 = 0$$

имеет единственное решение.

Задача 147 (геологический факультет (май), 2003, №6)**.** При каких значениях параметра a уравнение

$$2\pi^2(x-2)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 25a^3 = 0$$

имеет единственное решение?

Задача 148 (химический факультет и факультет наук о материалах(июль), 2002, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2^{-x^2} \cdot 4^x + \sin(\pi x/4) + \cos(\pi x/4) - 2 = a^3 - 3a^2 + a + \sqrt{2}$$

имеет единственное решение.

Задача 149 (географический факультет (июль), 1997, № 4 (6))**.** Найдите все значения параметра b, при каждом из которых единственное решение имеет система неравенств

$$\begin{cases} by^2 + 4by - 2x + 7b + 4 \leqslant 0, \\ bx^2 - 2y - 2bx + 4b - 2 \leqslant 0. \end{cases}$$

Задача 150 (экономический факультет, 1999, № 7)**.** Найдите все значения параметра b, при каждом из которых система

$$\begin{cases} b\sin|2z| + \log_5\left(x\sqrt[8]{2-5x^8}\right) + b^2 = 0, \\ \left((y^2-1)\cos^2 z - y\cdot\sin 2z + 1\right)\left(1 + \sqrt{\pi+2z} + \sqrt{\pi-2z}\right) = 0 \end{cases}$$

разрешима и имеет не более двух решений; определите эти решения.

Задача 151 (химический факультет, 1986, № 5)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Задача 152 (экономический факультет (отделение менеджмента), 2003, № 5 (5))**.** Найдите все значения параметра b, при которых уравнение

$$b^2\sin\left(\frac{\pi+2}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2x}{b+1} - \frac{2}{b+1}\right) - b\sqrt{4x^2+8-8x} = 3 + \arcsin|1-x|$$

имеет единственное решение.

Задача 153 (химический факультет (июль), 2005, № 6 (6))**.** При каких значениях параметра a уравнение

$$|x| + \left|\frac{2x-1}{3x-2}\right| = a$$

имеет ровно три решения?

Задача 154 (филологический факультет, 1984, № 5)**.** Найдите все значения параметра b, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant (x-b)^2, \\ x \geqslant (y-b)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 155 (химический факультет, 1988, № 5 (5))**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых равносильны системы уравнений

$$\begin{cases} x+2y = 2-a, \\ -x+ay = a-2a^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2-y^4-4x+3=0, \\ 2x^2+y^2+(a^2+2a-11)x+12-6a=0. \end{cases}$$

Задача 156 (биологический факультет, 1991, № 5 (5))**.** Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0, \\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x, \\ \big(x+y+a\sin^2 z\big)\big((1-a)\ln(1-xy)+1\big)=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 157 (экономический факультет (отделение экономики), 2000, № 7)**.** Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $[1/6;6]$ и удовлетворяет на этом отрезке системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 f(x)-1/2} - 12\cos\left(2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{10}{x}, \\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решите неравенство $f(x) \leqslant \pi/8$.

Ответы. **145**. $a=\pm\sqrt{2}$. **146**. $a=5\pi/6+\pi l$, $\pi/18+2\pi m$, $13\pi/18+2\pi n$, $l,m,n\in\mathbb{Z}$. **147**. $a=0$, $a=-2/5$. **148**. $a=0$, $a=(3\pm\sqrt{5})/2$. **149**. $b=1/3$. **150**. Если $b=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$, то одно решение $(1/\sqrt[8]{5};0;0)$. Если $b=-1/2+\sqrt{3/8}$, то два решения $(1/\sqrt[8]{5};1;\pi/4)$ и $(1/\sqrt[8]{5};-1;-\pi/4)$. **151**. $a=-1/32$, $a=-1/4$. **152**. $b=3$. **153**. $a=2/3$, $a=2$. **154**. $b=-1/4$. **155**. $a=-2$, $a=-1$. **Указание.** Решите первое уравнение системы, а затем с использованием симметрий исследуйте и второе уравнение. **156**. $a=1$. **157**. $x\in[3\sqrt{2};6]$.

§1.11. Задачи, основанные на применении некоторых неравенств

Полезно помнить следующие неравенства:

неравенство	случай равенства
$(x-y)^2 \geqslant 0$	$x=y$
$x^2+y^2 \geqslant 2xy$	$x=y$
$x+y \geqslant 2\sqrt{xy}, \quad x,y \geqslant 0$	$x=y$
$x+\dfrac{y^2}{x} \geqslant 2y, \quad x>0$	$x=y$
$x+\dfrac{y^2}{x} \leqslant 2y, \quad x<0$	$x=y$
$\dfrac{2xy}{x^2+y^2} \leqslant 1$	$x=y$
$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2},$	$x=y$
$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz, \quad x,y,z>0$	$x=y=z$
$\lvert x\rvert+\lvert 1-x\rvert \geqslant 1$	$x\in[0;1]$

Покажем, как пользоваться данной таблицей. Например, неравенство $x^2+y^2 \geqslant 2xy$ справедливо для всех возможных значений x, y. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=y$. Если x и y таковы, что $x \neq y$, то справедливо строгое неравенство $x^2+y^2>2xy$.

Доказательства

I. Неравенства со второго по пятое, очевидно, вытекают из тривиального первого неравенства.

II. Шестое неравенство также следует из первого, но может быть получено и как следствие из выпуклости вниз функции $f(x)=x^2$.

III. Доказательство неравенства

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz, \quad x,y,z>0,$$

основано на представлении

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}\cdot(x+y+z)\cdot\big((x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\big).$$

При этом, как видно из данного представления, равенство в исходном неравенстве может достигаться лишь в случае $x = y = z$.

IV. Доказательство неравенства $|x| + |1 - x| \geqslant 1$, где равенство достигается лишь для $x \in [0; 1]$. Рассмотрим функцию $f(x) = |x| + |1 - x|$. Для $f(x)$ справедливо представление

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in (-\infty; 0), \\ 1, & x \in [0; 1], \\ 2x - 1, & x \in (1; +\infty). \end{cases}$$

На промежутке $(-\infty; 0)$ функция $f(x)$ (см. рис. 1.43) монотонно убывает, откуда следует, что $f(x) > f(0) = 1$ для $x \in (-\infty; 0)$, на промежутке $(0; +\infty)$ функция $f(x)$ монотонно возрастает, откуда следует, что $f(x) > f(1) = 1$ для $x \in (0; +\infty)$.

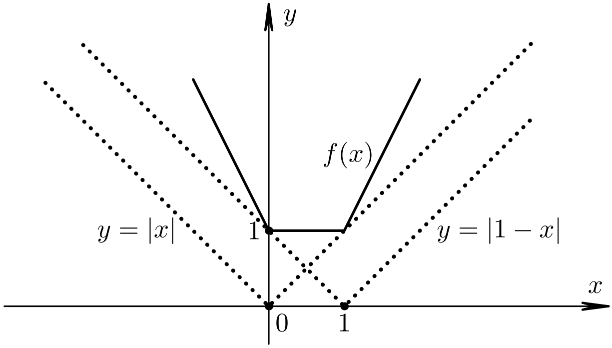

Рис. 1.43. График функции $f(x) = |x| + |1 - x|$

Пример 28. Решите уравнение

$$\frac{25}{\sqrt{x-1}} + \frac{4}{\sqrt{y-2}} = 14 - \sqrt{x-1} - \sqrt{y-2}.$$

Решение. Запишем исходное уравнение в виде

$$\left(\sqrt{x-1} + \frac{25}{\sqrt{x-1}}\right) + \left(\sqrt{y-2} + \frac{4}{\sqrt{y-2}}\right) = 14.$$

Заметим, что из неравенства $t + y^2/t \geqslant 2 \cdot t$, $t > 0$, вытекает, что

$$\sqrt{x-1} + \frac{25}{\sqrt{x-1}} \geqslant 2 \cdot 5 = 10,$$

$$\sqrt{y-2} + \frac{4}{\sqrt{y-2}} \geqslant 2 \cdot 2 = 4,$$

откуда получаем

$$\left(\sqrt{x-1}+\frac{25}{\sqrt{x-1}}\right)+\left(\sqrt{y-2}+\frac{4}{\sqrt{y-2}}\right)\geqslant 14.$$

Если сумма двух слагаемых, первое из которых не меньше 10, а второе не меньше 4, равна 14, то первое слагаемое равно 10, а второе 4. Воспользуемся строкой 4 таблицы. Поскольку знак равенства в неравенстве вида $t+y^2/t\geqslant 2\cdot t$, $t>0$ достигается только лишь в случае $t=y$, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}=5,\\ \sqrt{y-2}=2.\end{cases}\iff\begin{cases}x=26,\\ y=6.\end{cases}$$

Ответ. $x=26$, $y=6$.

Пример 29. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases}|x-a|+|y-a|+|a+1-x|+|a+1-y|=2,\\ y+2|x-5|=6\end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Произведя очевидную перегруппировку и используя неравенство $|t|+|1-t|\geqslant 1$, мы можем заключить, что для левой части в первом уравнении системы справедливо неравенство

$$|x-a|+|y-a|+|a+1-x|+|a+1-y| =$$
$$=(|x-a|+|1-(x-a)|)+(|y-a|+|1-(y-a)|)\geqslant 2.$$

Но так как по условию задачи сумма равна 2, из строки 9 таблицы следует, что каждое из слагаемых в скобках равно 1, так как равенство достигается лишь для $t\in[0;1]$. Поэтому исходная система равносильна системе

$$\begin{cases}|x-a|+|1-(x-a)|=1,\\ |y-a|+|1-(y-a)|=1,\\ y+2|x-5|=6\end{cases}\iff\begin{cases}0\leqslant x-a\leqslant 1,\\ 0\leqslant y-a\leqslant 1,\\ y+2|x-5|=6\end{cases}\iff$$
$$\iff\begin{cases}a\leqslant x\leqslant 1+a,\\ a\leqslant y\leqslant 1+a,\\ y+2|x-5|=6.\end{cases}$$

Поскольку $y = 6 - 2|x-5|$, система имеет единственное решение, если единственно решение по x у системы

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant 1+a, \\ a \leqslant 6 - 2|x-5| \leqslant 1+a \end{cases} \iff \begin{cases} a \leqslant x \leqslant 1+a, \\ 5-a \leqslant 2|x-5| \leqslant 6-a. \end{cases}$$

Рассмотрим следующие случаи.

I. Пусть $a > 6$. Тогда решений нет.

II. Пусть $a \in [5;6]$. Тогда система равносильна следующей:

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant 1+a, \\ \dfrac{a-6}{2} \leqslant x-5 \leqslant \dfrac{6-a}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a \leqslant x \leqslant 1+a, \\ \dfrac{a+4}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{16-a}{2}. \end{cases}$$

Последняя система имеет единственное решение (см. рис. 1.44–1.45), если $a = (16-a)/2$, т. е. $a = 16/3 \in [5;6]$, либо если $1+a = (a+4)/2$, т. е. $a = 2 \notin [5;6]$. Следовательно, $a = 16/3$ является решением, а $a = 2$ — нет.

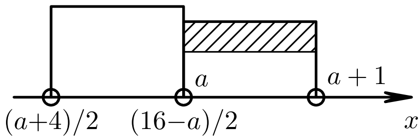

Рис. 1.44

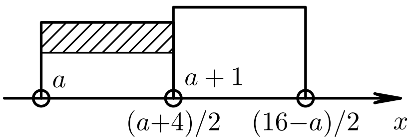

Рис. 1.45

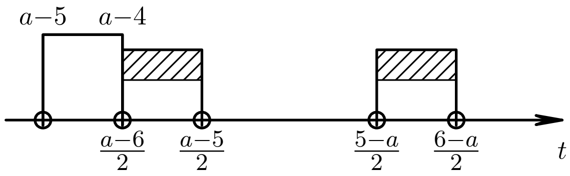

Рис. 1.46

III. Пусть $a < 5$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} a-5 \leqslant x-5 \leqslant a-4, \\ \dfrac{5-a}{2} \leqslant |x-5| \leqslant \dfrac{6-a}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a-5 \leqslant t \leqslant a-4, \\ \dfrac{5-a}{2} \leqslant |t| \leqslant \dfrac{6-a}{2}. \end{cases}$$

Так как $a-5 < (a-5)/2$, последняя система имеет единственное решение только в случае (см. рис. 1.46), когда $a-4 = (a-6)/2$, т. е. $a = 2$.

Поскольку $a = 2$ удовлетворяет условию $a < 5$, мы получаем, что при $a = 2$ исходная система имеет единственное решение.

Ответ. $a = 2$, $a = 16/3$.

Задача 158 (психологический факультет, 1997, № 4)**.** При каких действительных p уравнение

$$4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$$

имеет решение.

Задача 159 (химический факультет (май), 1996, № 5)**.** Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5x+5} \geqslant 2, \\ x^2 + 6x + 5 \leqslant 0. \end{cases}$$

Задача 160 (физический факультет (март), 2002, № 7)**.** Для каждого параметра a решите систему

$$\begin{cases} 4\log_4^2 x + 9\log_8^2 y \leqslant 4(a^2+a), \\ \log_2^2 xy \geqslant 8(a^2+a). \end{cases}$$

Задача 161 (психологический факультет, 1988, № 6)**.** Найдите наибольшее значение параметра a, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \leqslant \sqrt[4]{a^3} \cdot |\sin(\pi x/2)|$$

имеет хотя бы одно решение.

Задача 162 (механико-математический факультет (июль), 1965)**.** Найдите все пары чисел $(x; y)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y).$$

Задача 163 (психологический факультет, 1987, № 6)**.** Докажите, что все решения неравенства

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^2-1} > 2$$

удовлетворяют неравенству

$$x + 2\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 + 2\sqrt[3]{x^2-1}.$$

Задача 164 (географический факультет, 2004, №5 (6))**.** При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |x+a|+|y-a|+|a+1+x|+|a+1-y|=2, \\ y=2|x-4|-5 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Задача 165 (механико-математический факультет (июль), 1965)**.** Найдите все пары чисел $(x;y)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2+\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2=12+\frac{\sin y}{2}.$$

Задача 166 (химический факультет и факультет наук о материалах (май), 2000, №5)**.** Решите уравнение

$$2^{2^{\sin^2 x}}+2^{2^{(\cos 2x)/2}}=2^{1+\sqrt[4]{2}}.$$

Задача 167 (психологический факультет, 1984, №7)**.** Найдите все пары чисел x и y, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+y-1}+3\cdot 4^{2y-1}\leqslant 2, \\ x+3y\geqslant 2-\log_4 3. \end{cases}$$

Задача 168 (химический факультет (июль), 1997, №6)**.** Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения x^2+2y^2, если

$$x^2-xy+2y^2=1.$$

Задача 169 (факультет наук о материалах (апрель, пробный экзамен), 2004, №6 (6))**.** Найдите все значения параметра b, при каждом из которых неравенство

$$(3-2\sqrt{2})^x+(b^4+12-6b^2)\cdot(3+2\sqrt{2})^x+9^t+b^2/4+b\cdot 3^t-\sqrt{12}\leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение (t,x).

Задача 170 (психологический факультет, 1991, №5)**.** При каждом значении параметра $a\geqslant 1/(2\pi)$ найдите все корни уравнения

$$\cos\left(\frac{2x+a}{2x^2+2ax+\frac{5}{2}a^2}\right)=\cos\left(\frac{2x-a}{2x^2-2ax+\frac{5}{2}a^2}\right).$$

Задача 171 (экономический факультет (отделение экономики), 2004, № 6 (7))**.** Найдите наибольшее значение ω, при котором имеет решение система

$$\begin{cases} 4\sin^2 y - \omega = 16\sin^2 \dfrac{2x}{7} + 9\operatorname{ctg}^2 \dfrac{2x}{7}, \\ (\pi^2\cos^2 3x - 2\pi^2 - 72)y^2 = 2\pi^2(1+y^2)\sin 3x. \end{cases}$$

Задача 172 (факультет наук о материалах (апрель), 2002, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$4^x + 4^{-x} + 8|2^x + 2^{-x} - a| + 11a < 26 + 2a(2^x + 2^{-x})$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответы. 158. $[17; +\infty)$. **159.** $x = -1$. **160.** Для $a \in (-1; 0)$ решений нет. Для $a = -1$, $a = 0$ решение $x = y = 1$. Для $a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ решения $x_1 = y_1 = 2^{2\sqrt{(a^2+a)/2}}$, $x_2 = y_2 = 2^{-2\sqrt{(a^2+a)/2}}$ **161.** $a = 1/16$. **162.** $x = \pi/4 + \pi n$, $y = \pi/4 + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; $x = -\pi/4 + \pi n$, $y = -\pi/4 + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **164.** $a = -2$, $a = -16/3$. **Указание.** Используйте неравенство $|z| + |1-z| \geqslant 1$. **165.** $x = \pi/4 + \pi n/2$, $y = \pi/2 + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **166.** $\pm\pi/6 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **167.** $x = 1/2 + (1/2)\log_4 3$, $y = 1/2 - (1/2)\log_4 3$. **168.** $(2\sqrt{2}/(2\sqrt{2}-1))$, $(2\sqrt{2}/(2\sqrt{2}+1))$. **169.** $b = -\sqrt{3}$. **170.** $x = 0$; $x = \sqrt{5}a/2$; $x = -\sqrt{5}a/2$. **171.** -14. **172.** $a \in (-8; -4) \cup (7; +\infty)$.

§1.12. Решения, основанные на нахождении наибольших и наименьших значений (метод минимаксов)

При решении задач данного параграфа используются неравенства предыдущего параграфа в комбинации с удачной группировкой, или заменой переменных, или, возможно, выделением полного квадрата. Опишем так называемый метод *минимаксов.*

Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняются неравенства $f(x) \geqslant A$, $g(x) \leqslant A$. Требуется решить уравнение

$$f(x) = g(x). \tag{1.8}$$

Тогда уравнение (1.8) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

иначе говоря, уравнение (1.8) можно переписать в виде

$$\min f(x) = \max g(x),$$

т. е. нужно найти такие значения x_k, чтобы они одновременно являлись точками минимума для функции $f(x)$ и точками максимума для функции $g(x)$. Кстати, именно по этой причине данные уравнения иногда называют *минимаксными* задачами.

Пример 30. Решите уравнение

$$2 + \log_2^2(2 + |(x-2)(x-3)|) = 3^{(5+4x-x^2)/9}.$$

Решение. Исследуем функцию $h(x) = 5+4x-x^2$. Выделив полный квадрат, получаем $h(x) = 9 - (x-2)^2 \leqslant 9$. Отсюда имеем

$$g(x) = 3^{(5+4x-x^2)/9} = 3^{h(x)/9} \leqslant 3.$$

С другой стороны,

$$f(x) = 2 + \log_2^2(2 + |(x-2)(x-3)|) \geqslant 2 + \log_2^2 2 = 3.$$

Следовательно,

$$3 \leqslant 2 + \log_2^2(2 + |(x-2)(x-3)|) = 3^{(5+4x-x^2)/9} \leqslant 3 \iff \\ \iff \min f(x) = \max g(x),$$

т. е. минимум функции $f(x)$ совпадает с максимумом функции $g(x)$. Следовательно, исходная задача равносильна системе

$$\begin{cases} f(x) = 3, \\ g(x) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) = 3, \\ x = 2 \end{cases} \iff x = 2.$$

Ответ. $x = 2$.

Пример 31 (факультет ВМиК (апрель), 1999, № 5 (6))**.** При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{x^2+2ax+4a-3} - 2 = \left|\frac{a-2}{x+a}\right|$$

имеет ровно два корня, лежащих на отрезке $[-4; 0]$?

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{x^2+2ax+4a-3} - 2 = \left|\frac{a-2}{x+a}\right| \iff$$
$$\iff 3^{(x+a)^2-(a-2)^2+1} - 2 = \left|\frac{a-2}{x+a}\right| \iff$$
$$\iff 3^{(t^2-1)(a-2)^2+1} - 2 = \frac{1}{|t|},$$

где $t = (x+a)/(a-2)$, $a \neq 2$. При $a = 2$ исходное уравнение принимает вид $3^{(x+2)^2+1} = 2$, которое решений не имеет, так как левая часть строго больше 2.

Таким образом, мы решаем уравнение

$$3^{(t^2-1)(a-2)^2+1} - 2 = \frac{1}{|t|}$$

при $t = (x+a)/(a-2)$, $a \neq 2$. Разберём три случая (см. рис. 1.47)

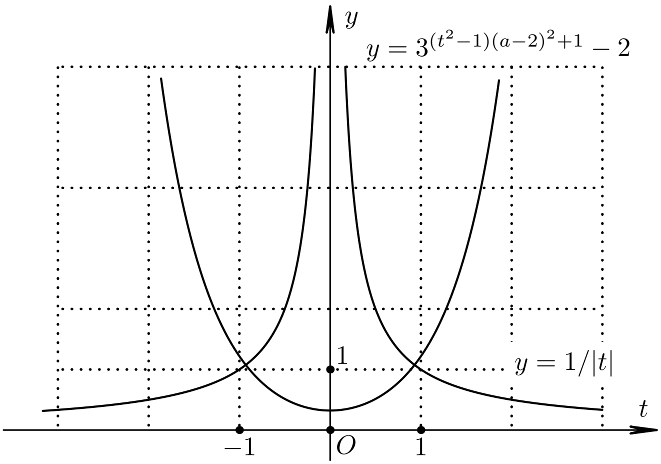

Рис. 1.47

I. Если $|t| > 1$, то решений нет, так как

$$1 > \frac{1}{|t|} = 3^{(t^2-1)(a-2)^2+1} - 2 > 3 - 2 = 1.$$

II. Если $|t| < 1$, то аналогично решений нет, так как

$$1 < \frac{1}{|t|} = 3^{(t^2-1)(a-2)^2+1} - 2 < 3 - 2 = 1.$$

III. Значения $t = \pm 1$, очевидно, являются корнями уравнения.

Итак, случай $t = 1$ даёт решение $x = -2$, которое принадлежит отрезку $[-4; 0]$ при любых a.

Случай $t = -1$ даёт решение $x = 2 - 2a$. Найдём условие на параметр a, при котором решение $x = 2 - 2a$ принадлежит отрезку $[-4; 0]$:

$$-4 \leqslant 2 - 2a \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -6 \leqslant -2a \leqslant -2 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leqslant a \leqslant 3.$$

Ответ. $a \in [1; 2) \cup (2; 3]$.

Задача 173 (химический факультет (весна), 1993, № 5)**.** Решите уравнение

$$2\big(1 + \sin^2(x-1)\big) = 2^{2x - x^2}.$$

Задача 174 (ЕГЭ, 2003, № С2)**.** Найдите все значения p, при которых уравнение $6\sin^3 x = p - 5\cos 2x$ не имеет корней.

Задача 175 (факультет почвоведения (июль), 1989, № 5 (5))**.** Решите неравенство

$$(x^2 - 4x + 3)\log_{1/\sqrt{2}}\big(\cos^2 \pi x + \cos x + 2\sin^2(x/2)\big) \geqslant 2.$$

Задача 176 (геологический факультет (май), 1995, № 9 (9))**.** Для каждого значения a решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(|a|x^2 - 3x + 4)}{\log_2(-3x+4)} = 5^{-|x|(x+1)^2}, \\ x \leqslant 1. \end{cases}$$

Задача 177 (химический факультет (весна), 1994, № 5)**.** При каких значениях q разрешима система

$$\begin{cases} x^2 + qx + 3 = 0, \\ \sin^2 q\pi + \cos^2 \frac{\pi}{2}x + 2^{y^2} = \sin \frac{\pi}{2}x? \end{cases}$$

Найдите её решения.

Задача 178 (факультет почвоведения (июль), 1988, № 5)**.** Найдите все значения параметра p, при каждом из которых существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 3p^2 + 3p + 3 \leqslant 3\sin y - 4\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Задача 179 (географический факультет, 1986, № 5). Для каждого значения a, удовлетворяющего неравенствам $0 < a < 2$, найдите наименьшее значение выражения

$$x^2 + y^2 - 2a(x + y)$$

при условии $\cos(\pi xy/2) = 1$.

Задача 180 (факультет ВМиК (июль), 1983, № 6). Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие условию

$$\sqrt{2 - |y|} \cdot (5\sin^2 x - 6\sin x \cdot \cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) =$$
$$= (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - 5\pi^2/4.$$

Задача 181 (географический факультет (июль), 2001, № 5 (6)). Решите уравнение

$$4\arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = 6\pi/x.$$

Задача 182 (биологический факультет (май), 2003, № 6). Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (\log_b f(x) - 1)^2 + (y^2 - 5 \cdot 10^3 \cdot y + 2b)^2 = 0, \\ z^2 - (b - 2 \cdot 10^6) \cdot z + 25 \cdot 10^{10} = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, где

$$f(x) = |x| + |x - 1^2| + |x - 2^2| + \ldots + |x - 104^2|.$$

Задача 183 (факультет ВМиК (апрель), 1999, № 5 (6)). При каких значениях параметра a уравнение

$$|2a - 1|\big((1/2)^{x^2+4ax+4a-2} - 1\big) = |x + 2a|$$

имеет ровно два корня, лежащих на отрезке $[-2; 1]$?

Задача 184 (географический факультет, 1985, № 5). Найдите все числа a, удовлетворяющие условию $-1 < a < 1$, для которых выражение

$$1 + 2\sqrt{x^2 - 2axy + y^2 - 6y + 10}$$

принимает наименьшее значение лишь при одной паре чисел $(x; y)$.

Задача 185 (механико-математический факультет (июль), 1995, №6). Найдите все значения α из отрезка $[0; 2\pi]$, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z(x+y+z) - \sin\alpha = 0, \\ (x+1)\sin^2(\alpha/2) + y^2\sqrt{x} + \alpha^2\sqrt{z} + \sin(3\alpha/2) = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответы. 173. $x = 1$. **174.** $p \in (-\infty; -11) \cup (5; +\infty)$. **176.** Если $a = 0$, то $x = -1$, 0, если $a \neq 0$, то $x = 0$. **175.** $x = 2$. **177.** Если $q = -4$, то решение $(1; 0)$, если $q = 4$, то решение $(-3; 0)$. **178.** $p = -2$, $p = 1/2$. **179.** Для $a \in (0; 4-2\sqrt{2}]$ минимум равен $-a^2$, а для $a \in (4-2\sqrt{2}; 2)$ минимум равен $8(1-a)$. **180.** $x = -1$, $y = \pm 2$. **Указание.** Докажите, что выражение в скобках больше нуля. **181.** 3. **182.** $a \in [3 \cdot 10^6; 3.125 \cdot 10^6]$. **183.** $[0; 1/2) \cup \cup (1/2; 3/4]$. **184.** $a \in [-1/\sqrt{10}; 1/\sqrt{10}]$. **185.** 0, π, 2π.

§1.13. Решение задач при помощи графика

При решении задач данного параграфа необходимо помнить уравнения прямой, параболы и окружности.

Ia. Начнём с общего уравнения прямой

$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

Данный вид уравнения прямой называется каноническим видом.

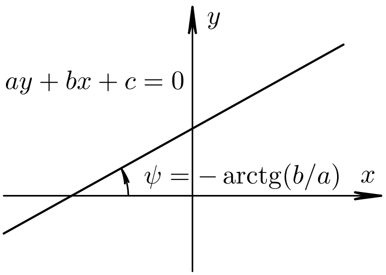

Рис. 1.48. График прямой $ax + by + c = 0$

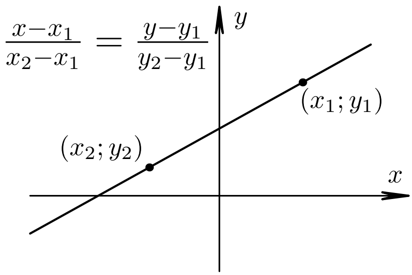

Рис. 1.49. Прямая, проходящая через 2 точки

Iб. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), записывается в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad x_1 \neq x_2, \quad y_1 \neq y_2.$$

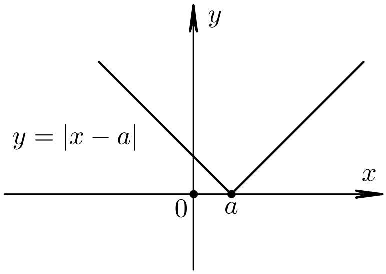

Рис. 1.50. График функции $f(x) = |x - a|$

В случае $x_2 = x_1$ уравнение запишем в виде $x = x_1$, а в случае $y_2 = y_1$ — в виде $y = y_1$.

Iв. График функции $y = |x-a|$. (Более общая ситуация построения графика функции $y = |f(x)|$ из графика функции $y = f(x)$ состоит в том, что отрицательные значения функции $f(x_0)$ мы заменяем на $-f(x_0)$, т. е. отрицательные значения симметрично отражаем относительно прямой $y = 0$.)

II. Уравнение параболы имеет вид (см. §1.5)

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

III. Уравнение окружности с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиусом R имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

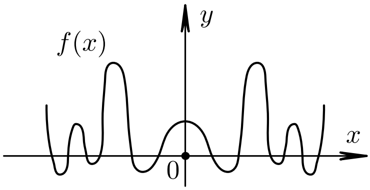

Рис. 1.51. График функции $f(x)$

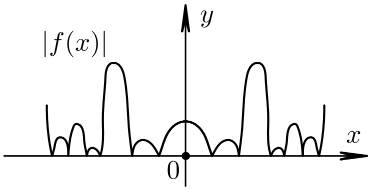

Рис. 1.52. График функции $|f(x)|$

IV. Расстояние между двумя точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

V. График гиперболы $y = 1/x$. Вертикальная асимптота $x = 0$, горизонтальная асимптота $y = 0$. На основе данного графика функции можно получить график произвольной дробно-линейной функции

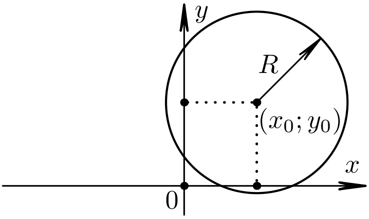

Рис. 1.53. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (опять графиком будет гипербола), $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Действительно, из равенства

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx+d)}$$

мы делаем вывод, что график дробно-линейной функции получен из гиперболы $y = 1/x$ сдвигами и растяжением.

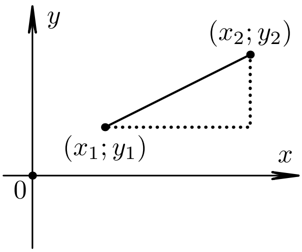

Рис. 1.54. Расстояние между точками

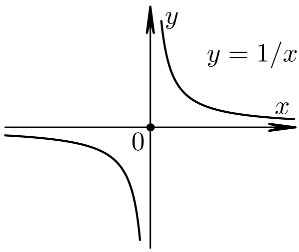

Рис. 1.55. График функции $f(x) = 1/x$

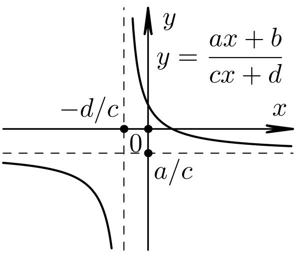

Рис. 1.56. График функции $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Пример 32 (олимпиада «Ломоносов–2005» (апрель), 2005, № 8 (10)). Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4x - \big|3x - |x+a|\big| = 9|x-1|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = 9\big|x-1\big| - 4x + \big|3x - |x+a|\big|.$$

Числовая прямая разбивается на конечное число интервалов, на которых данная функция является линейной. Эти интервалы определяются при раскрытии модулей. Коэффициент при первом модуле превосходит по модулю сумму оставшихся коэффициентов при x, с каким бы знаком мы ни раскрывали оставшиеся модули. Действительно, $9-4-3-1 = 1 > 0$. Поэтому на всех интервалах до $x = 1$ коэффициент линейного приращения отрицателен, а на всех интервалах после $x = 1$ коэффициент линейного приращения положителен. Это означает, что функция $f(x)$ убывает при $x < 1$ и возрастает при $x > 1$, а $x = 1$ — точка минимума (см. рис. 1.57). Для того чтобы уравнение $f(x) = 0$

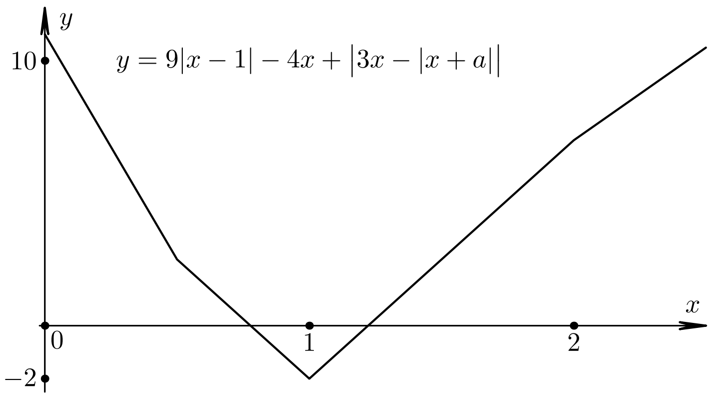

Рис. 1.57. Случай $a = -2$

имело хотя бы один корень, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\min f(x) \leqslant 0$, т. е. $f(1) \leqslant 0$. Введём обозначение $t = |1+a|$, тогда

$$f(1) \leqslant 0 \iff |3 - |1+a|| - 4 \leqslant 0 \iff |3-t| \leqslant 4 \iff$$
$$\iff (3-t)^2 - 4^2 \leqslant 0 \iff (-1-t)(7-t) \leqslant 0 \iff$$
$$\iff (1+t)(t-7) \leqslant 0 \iff t \in [-1; 7].$$

Теперь, переходя к параметру a, получаем неравенство $|1 + a| \leqslant 7$, решая которое, приходим к ответу: $a \in [-8; 6]$.

Ответ. $a \in [-8; 6]$.

Пример 33 (факультет ВМиК (апрель), 2003, № 6 (6))**.** Решите неравенство

$$\arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x) \geqslant 3x - 18.$$

Решение. Заметим, что функции $\arcsin(\sin x)$, $\arccos(\cos x)$ периодичны с периодом 2π (см. рис. 1.58–1.59). В частности, справедливы

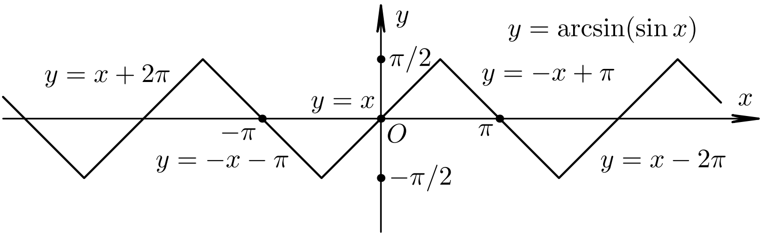

Рис. 1.58

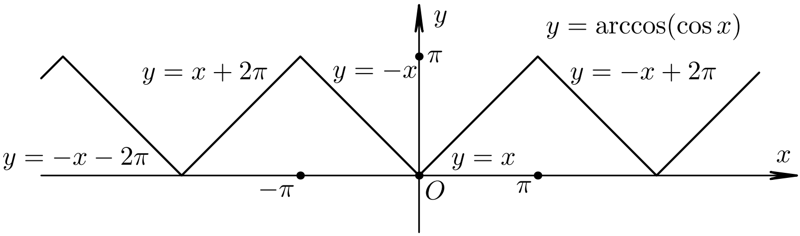

Рис. 1.59

соотношения

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2\pi k, & x \in [-\pi/2 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}, \\ \pi - x + 2\pi k, & x \in [\pi/2 + 2\pi k; 3\pi/2 + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

и

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2\pi k, & x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}, \\ -x + 2\pi k, & x \in [-\pi + 2\pi k; 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Построим график функции $f(x) = \arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x)$ на периоде, т. е. на отрезке $[0; 2\pi]$. Поскольку на промежутках $[0; \pi/2]$; $[\pi/2; \pi]$;

$[\pi; 3\pi/2]$; $[3\pi/2; 2\pi]$ функция линейна, мы наносим точки $(x; f(x))$ с абсциссами $x = 0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π на координатную плоскость и соединяем их прямолинейными отрезками. Далее распространим функцию на $\mathbb{R}$ с периодом 2π. Затем построим прямую $y = 3x - 18$ (см. рис. 1.60).

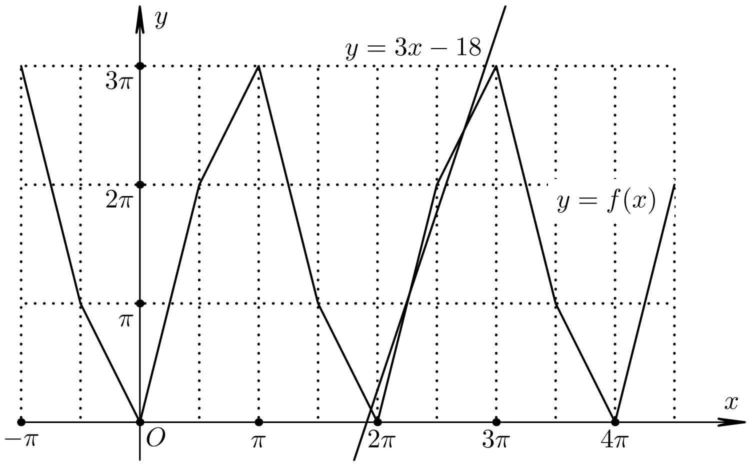

Рис. 1.60

Решим уравнение

$$\arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x) = 3x - 18,$$

а затем методом интервалов решим исходное неравенство. Так как $0 \leqslant f(x) \leqslant 3\pi$, на участке $(-\infty; 3\pi/2) \cup (3\pi; +\infty)$ решений у уравнения нет (значения функции $g(x) = 3x - 18$ на этих участках выходит за пределы отрезка $[0; 3\pi]$). Для функции $f(x)$ справедливо соотношение

$$f(x) = \arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x) = \begin{cases} -2x - 4\pi, & x \in [3\pi/2; 2\pi], \\ 4x - 8\pi, & x \in [2\pi; 5\pi/2], \\ 2x - 3\pi, & x \in [5\pi/2; 3\pi]. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} -2x - 4\pi = 3x - 18 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_1 = (4\pi + 18)/5 \in [3\pi/2; 2\pi], \\ 4x - 8\pi = 3x - 18 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_2 = 8\pi - 18 \in [2\pi; 5\pi/2], \\ 2x - 3\pi = 3x - 18 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_3 = 18 - 3\pi \in [5\pi/2; 3\pi]. \end{aligned}$$

Остаётся применить метод интервалов для неравенства вида

$$f(x) - g(x) \geqslant 0:$$

$$f(0) - g(0) = 18 \quad \Longrightarrow \quad f(x) - g(x) \geqslant 0, \quad x \in (-\infty; x_1],$$
$$f(2\pi) - g(2\pi) = 18 - 6\pi < 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) - g(x) < 0, \quad x \in (x_1; x_2),$$
$$f(5\pi/2) - g(5\pi/2) = 2\pi - 15\pi/2 + 18 = 18 - 9\pi/2 > 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad f(x) - g(x) \geqslant 0, \quad x \in [x_2; x_3],$$
$$f(4\pi) - g(4\pi) = 18 - 12\pi < 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) - g(x) < 0, \quad x \in (x_3; +\infty).$$

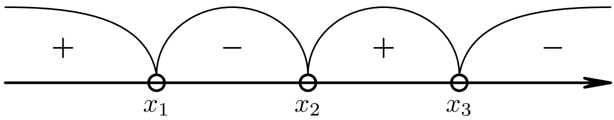

Рис. 1.61. $f(x) - g(x) \geqslant 0$

Тем самым мы приходим к ответу.
Ответ. $x \in (-\infty; (4\pi + 18)/5] \cup [8\pi - 18; 18 - 3\pi]$.

Задача 186 (экономический факультет (отделение экономики), 1995, № 6)**.** Найдите наименьшее значение выражения $a^2 + (b-1)^2$ на множестве таких чисел a и b, для которых уравнение

$$\big||x-4| - 2\big| - ax + (4a - b) = 0$$

имеет ровно три различных корня. Укажите, при каких a и b достигается это наименьшее значение.

Задача 187 (психологический факультет (июль), 2003, № 5)**.** При каких значениях параметра a уравнение $2|x - 2a| - a^2 + 15 + x = 0$ не имеет решений? При каких значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-9; 10]$?

Задача 188 (олимпиада «Ломоносов–2005» (апрель), 2005, № 8 (10))**.** Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\big||x+a| - 2x\big| - 3x = 7|x-1|$$

имеет не более одного корня.

Задача 189 (олимпиада «Ломоносов–2005» (апрель), 2005, № 8 (10))**.** Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\big||x-a| + 2x\big| + 4x = 8|x+1|$$

не имеет ни одного корня.

Задача 190 (механико-математический факультет (устный экзамен)). Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$|x^2 - 6x + 8| + 2 = \log_a x$$

имеет единственное решение.

Задача 191 (факультет наук о материалах (май), 2000, № 6 (6)). Решите уравнение

$$x^2 = \arcsin(\sin x) + 10x.$$

Задача 192 (географический факультет (июль), 2000, № 6). Даны функции

$$f(x, y) = |y| + 2|x| - 2 \quad \text{и} \quad g(x, y, a) = x^2 + (y - a)(y + a).$$

1. При каком наименьшем положительном значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y, a) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения?

2. При этом значении параметра a найдите площадь фигуры, координаты $(x; y)$ всех точек которой удовлетворяют неравенству

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y, a)} \leqslant 0.$$

Задача 193 (факультет ВМиК (апрель), 2003, № 6 (6)). Решите неравенство

$$2\arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x) \geqslant -x - 3.$$

Задача 194 (социологический факультет, 1999, № 6). При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{ax^2+2a^2x+1} \sqrt{16\arcsin^{-4}(x + 3a)} \geqslant \left|\log_{ax^2+2a^2x+1} \sqrt{16\arcsin^{-4}(x + 3a)}\right|$$

не имеет решений на отрезке $[-5; 6]$?

Задача 195 (географический факультет (май), 1994, № 6)**.** Найдите все значения a, при каждом из которых корни уравнения

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=a$$

существуют и принадлежат отрезку $[2;17]$.

Задача 196 (механико-математический факультет (устный экзамен), 2002)**.** Найдите все значения параметров a и n, при которых разница между наибольшим и наименьшим положительными корнями уравнения

$$\underbrace{||\ldots|}_{n \text{ знаков}}x-1|-1|-1|-\ldots-1|-1|=a$$

равна 18,3.

Задача 197 (географический факультет (июль), 1994, № 5)**.** Найдите все значения a, при которых уравнение

$$a+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{1+2ax-a^2-x^2}$$

имеет ровно одно решение.

Задача 198 (механико-математический факультет (июль), 2003, № 5)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\arccos(5x)=a+\arcsin\sin(7x-3)$$

имеет единственное решение.

Задача 199 (механико-математический факультет (май), 2001, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых графики функций

$$y=\frac{3x+1}{x} \quad \text{и} \quad y=\frac{4x+3a-7}{ax-1}$$

разбивают координатную плоскость ровно на пять частей.

Ответы. **186.** Наименьшее значение $1/5$, достигается при $a=\pm 2/5$, $b=4/5$. **187.** 1. $a\in(-3;5)$. 2. $a\in[2-2\sqrt{7};-3]\cup\{5\}$. **188.** $a\in[-6;4]$. **189.** $a\in(-7;5)$. **190.** $a=2$. **191.** 0, $(9+\sqrt{81+12\pi})/2$. **192.** 1. $2/\sqrt{5}$. 2. $4-4\pi/5$. **193.** $x\in[-3/4-3\pi/2;-\pi+3/2]\cup[-3/2;+\infty)$. **194.** $a\in(-\infty;-1]\cup$ $\cup\{0\}\cup(2;+\infty)$. **195.** $a\in[1;3]$. **196.** $n=k$, $a=10{,}15-k$, где $k\in\mathbb{Z}$, $1\leqslant k\leqslant 10$. **197.** $a\in[2;3)\cup(3;4]$. **198.** $a\in[\pi-3-7/5;\pi-3+7/5)\cup$ $\cup\{\pi-3+\sqrt{74}/5\}$. **199.** $a\in[0;1]$.

§1.14. Метод областей

Метод областей является обобщением метода интервалов на случай более высокой размерности. Принципиально схема решения остаётся прежней. Действительно, ранее при решении, например, неравенства $f(x) \geqslant 0$ мы находили нули функции $f(x) = 0$ и тем самым числовая ось $\mathbb{R}$ разбивалось на подмножества, на которых функция была знакопостоянной. Затем мы отбирали нужные для нас подмножества, т. е. те, на которых $f(x) \geqslant 0$.

При решении неравенства $f(x, y) \geqslant 0$, в случае плоскости $\mathbb{R}^2$, мы опять находим все нули, в данном случае кривые, на которых $f(x, y) = 0$. Данные кривые разбивают плоскость на множества, где функция $f(x, y)$ знакопостоянна. Затем мы отбираем нужные для нас подмножества, т. е. те, на которых $f(x, y) \geqslant 0$. Данный отбор можно осуществить подстановкой произвольной точки из исследуемого подмножества. Разберём данный метод на простом примере

Пример 34. Найдите площадь множества точек $(x; y)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y \leqslant -1, \\ 3x - 2y + 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Выделив полный квадрат, перепишем систему в более удобном для нас виде

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 - 4 \leqslant 0, \\ 3x - 2y + 1 \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(x, y) \leqslant 0, \\ g(x, y) \geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение $(x-1)^2+(y-2)^2-4 = 0$ задаёт окружность с центром в точке $(1; 2)$ и радиусом 2. Следовательно, плоскость разбивается окружностью на два участка знакопостоянства — внешность и внутренность окружности (см. рис. 1.62, 1.63). Проверим, какое множество удовлетворяет условию $f(x, y) = (x-1)^2+(y-2)^2-4 \leqslant 0$. Для этого выберем произвольную точку $(1; 2)$ в окружности и точку $(-2; 2)$ вне окружности. Мы имеем

$$f(1; 2) = -4 < 0,$$
$$f(-2; 2) = 5 > 0.$$

Следовательно, нам подходит множество, лежащее внутри круга (см. рис. 1.62).

Перейдем ко второму неравенству $g(x, y) = 3x + 7y - 17 \geqslant 0$. Рассмотрим уравнение $3x - 2y - 17 = 0$ — это уравнение прямой. Данная

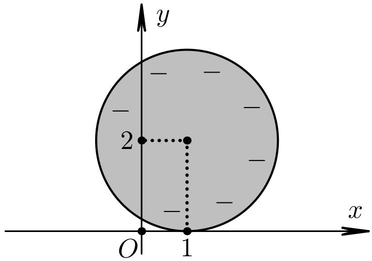

Рис. 1.62

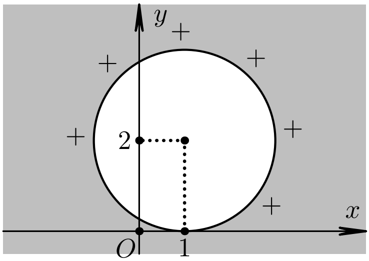

Рис. 1.63

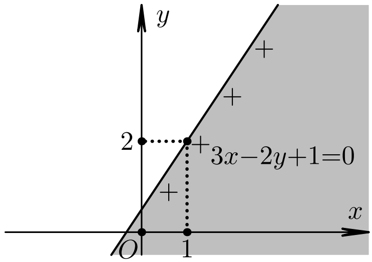

Рис. 1.64

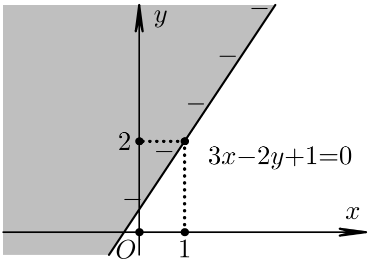

Рис. 1.65

прямая делит плоскость на две части (см. рис. 1.64, 1.65). Выберем по точке из каждого множества и определим, какое из множеств нам подходит:

$$g(-2;0) = -5 < 0,$$
$$g(2;0) = 7 > 0.$$

Следовательно, нам подходит множество, изображённое на рис. 1.64. Итак, нам требуется найти площадь множества, изображённого на рис. 1.66. Но поскольку прямая проходит через центр окружности, данное множество является половиной круга радиуса 2. Следовательно, площадь равна $\pi R^2/2 = 2\pi$.

Ответ. 2π.

Пример 35 (химический факультет (весна), 2000, №6)**.** При каждом значении параметра a решите неравенство

$$\sqrt{x+2a} > x + \sqrt{2a}.$$

Решение. Введём для удобства обозначения

$$y = \sqrt{x+2a}, \quad b = \sqrt{2a}.$$

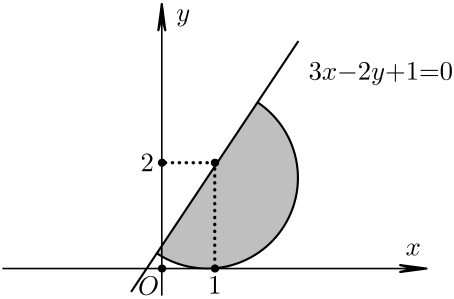

Рис. 1.66

Сразу заметим, что для y, b выполнены неравенства $y, b \geqslant 0$. Так как $x = y^2 - b^2$, исходное уравнение принимает вид $(y^2 - b^2) - (y - b) < 0$, или

$$\begin{cases} (y-b)\big(y-(1-b)\big) < 0, \\ y \geqslant 0, \;\; b \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Решим систему (1.9) двумя способами.

I. Графический способ. Так как уравнения $y = b$, $y = 1 - b$ задают прямые линии в плоскости $(b; y)$, удобно показать на графике области знакопостоянства функции $\big(y - b\big)\big(y - (1 - b)\big) = 0$ (см. рис 1.67) и, учитывая неотрицательность переменных y, b, изобразить множество, являющееся решением системы (см. рис 1.68).

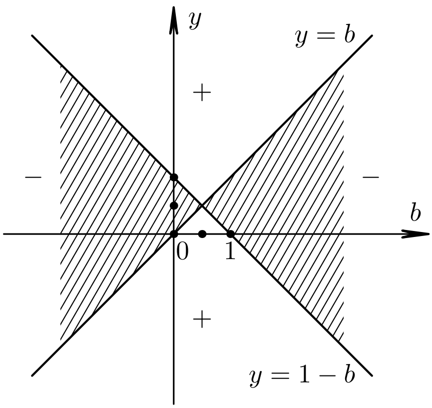

Рис. 1.67

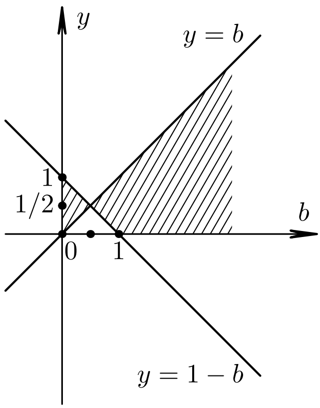

Рис. 1.68

Остаётся выписать ответ в терминах $(y; b)$: если $b \in [0; 1/2]$, то $y \in (b; 1-b)$; если $b \in (1/2; 1]$, то $y \in (1-b; b)$; если $b > 1$, то $y \in [0; b)$.

II. Решим систему (1.9) аналитически. Для этого нам потребуется сравнить корни $y_1 = b$, $y_2 = 1-b$ между собой и с нулём. С нулём сравниваем, так как нам требуются неотрицательные корни. Из уравнений

$$b = 1-b, \qquad b = 0, \qquad 1-b = 0$$

находим решения $b = 0$, $b = 1/2$, $b = 1$. Значит, по переменной b исследуем систему (1.9) на каждом из участков по отдельности: $b \in [0; 1/2]$, $b \in (1/2; 1]$, $b > 1$. И опять приходим к ответу в терминах $(y; b)$: если $b \in [0; 1/2]$, то $y \in (b; 1-b)$; если $b \in (1/2; 1]$, то $y \in (1-b; b)$; если $b > 1$, то $y \in [0; b)$.

Вернемся к переменным (a, x):

$$\left[\begin{array}{l} b \in [0; 1/2],\ y \in (b; 1-b), \\ b \in (1/2; 1],\ y \in (1-b; b), \\ b > 1,\ y \in [0; b) \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sqrt{2a} \in [0; 1/2],\ \sqrt{x+2a} \in (\sqrt{2a}; 1-\sqrt{2a}), \\ \sqrt{2a} \in (1/2; 1],\ \sqrt{x+2a} \in (1-\sqrt{2a}; \sqrt{2a}), \\ \sqrt{2a} > 1,\ \sqrt{x+2a} \in [0; \sqrt{2a}) \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} a \in [0; 1/8],\ x+2a \in (2a; 1-2\sqrt{2a}+2a), \\ a \in (1/8; 1/2],\ x+2a \in (1-2\sqrt{2a}+2a; 2a), \\ a > 1/2,\ x+2a \in [0; 2a) \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} a \in [0; 1/8],\ x \in (0; 1-2\sqrt{2a}), \\ a \in (1/8; 1/2],\ x \in (1-2\sqrt{2a}; 0), \\ a > 1/2,\ x \in [-2a; 0). \end{array}\right.$$

Ответ. При $a < 0$ решений нет; если $a \in [0; 1/8]$, то $x \in (0; 1-2\sqrt{2a})$; если $a \in (1/8; 1/2]$, то $x \in (1-2\sqrt{2a}; 0)$; если $a > 1/2$, то $x \in [-2a; 0)$.

Пример 36. Докажите, что множество, заданное на координатной плоскости условием

$$|3x+6| + |2y+3x-2| < 6,$$

является параллелограммом с центром в точке пересечения прямых $3x + 6 = 0$, $2y + 3x - 2 = 0$, которые являются диагоналями данного параллелограмма. Найдите площадь параллелограмма.

Решение. Заметим, что

$$|a| + |b| < c \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |a + b| < c, \\ |a - b| < c. \end{cases}$$

Действительно, это легко проверить, исследуя знаки чисел a и b. Используя данное замечание, находим, что исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} |(2y + 3x - 2) + (3x + 6)| < 6, \\ |(2y + 3x - 2) - (3x + 6)| < 6 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} |2y + 6x + 4| < 6, \\ |2y - 8| < 6 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |y + 3x + 2| < 3, \\ |y - 4| < 3. \end{cases}$$

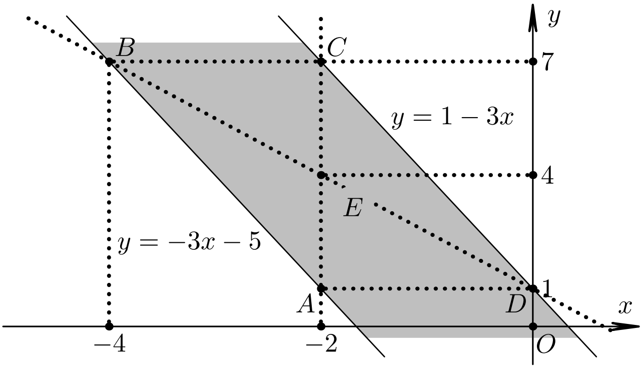

Рис. 1.69. Множество $-5 < y + 3x < 1$

Решением неравенства

$$|y + 3x + 2| < 3$$

является множество $-5 < y + 3x < 1$, см. рис. 1.69.

Решением неравенства

$$|y - 4| < 3$$

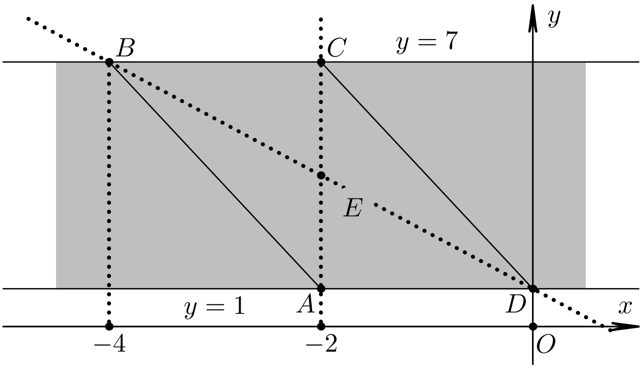

Рис. 1.70. Множество $1 < y < 7$

является множество $1 < y < 7$, см. рис. 1.70.

Пересечением данных множеств ($-5 < y + 3x < 1$ и $1 < y < 7$) действительно является параллелограмм со сторонами

$$AB: \quad y + 3x + 5 = 0, \qquad BC: \quad y = 7,$$
$$CD: \quad y + 3x - 1 = 0, \qquad DA: \quad y = 1,$$

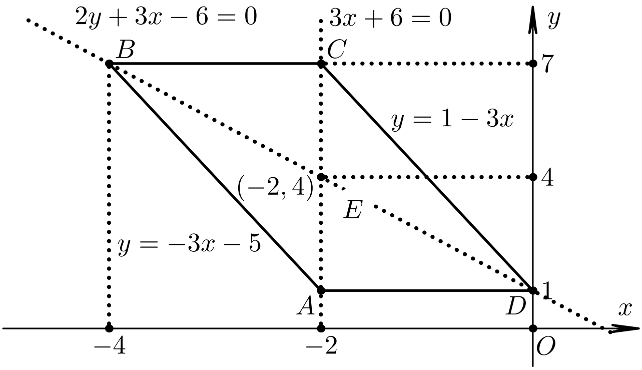

Рис. 1.71

Отсюда получаем, что диагоналями данного параллелепипеда действительно являются прямые $AC: 3x + 6 = 0$, $BD: 2y + 3x - 2 = 0$, которые пересекаются в точке $(-2; 4)$. Найдём площадь параллелограмма:

$$S_{ABCD} = AC \cdot AD = 2 \cdot 6 = 12.$$

Ответ. $S_{ABCD} = 12$.

Задача 200 (филологический факультет (июль), 2001, № 5 (5))**.** При каких значениях параметра a на плоскости $(x; y)$ существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 2y - x \leqslant 1, \\ y + 2x \leqslant 2, \\ y + ax \geqslant -1. \end{cases}$$

Задача 201 (ЕГЭ (демо), 2006, С5)**.** Шесть чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Первый, второй и четвертый члены этой прогрессии являются решениями неравенства

$$\log_{0,5x-1}\left(\log_4\left(\frac{x-11}{x-8}\right)\right) \geqslant 0,$$

а остальные не являются решениями этого неравенства. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

Задача 202 (высший колледж наук о материалах (апрель), 2000, № 2)**.** Найдите площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ y + 1 \geqslant 0, \\ 3y + 6 \geqslant 2|x|. \end{cases}$$

Задача 203 (факультет почвоведения (май), 1996, № 6)**.** Определите площадь фигуры, расположенной на координатной плоскости и состоящей из точек $(x; y)$, удовлетворяющих неравенству

$$\log_{(x^2+y^2)/2}(x - y) > 1.$$

Задача 204 (географический факультет (июль), 2005, № 4 (6))**.** Найдите периметр фигуры, точки которой на координатной плоскости $(x; y)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y > \big||x-2| - 1\big|, \\ x^2 + y^2 < 4x + 2y - 3. \end{cases}$$

Задача 205 (ИСАА, 1997, № 5 (7)). Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} y \leqslant \sqrt{4-x^2}, \\ y \geqslant |x-1|-3. \end{cases}$$

Задача 206 (факультет почвоведения (май), 2002, № 6 (7)). Определите площадь фигуры, расположенной на координатной плоскости и состоящей из точек $(x; y)$, удовлетворяющих неравенству

$$x^2 + y^2 \leqslant 6|x| - 6|y|.$$

Задача 207 (геологический факультет, 2005, № 7 (8)). Найдите все значения, которые может принимать сумма $x + a$ при условии

$$|2x + 4 - 2a| + |x - 2 + a| \leqslant 3.$$

Задача 208 (экономический факультет (отделение политической экономии), 1988, № 4 (6)). Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$|y - x^2/2| + |y + x^2/2| \leqslant 2 + x.$$

Задача 209 (экономический факультет (отделение вечернее и менеджмента), 1996, № 6). При каких значениях параметра p площадь фигуры, заданной на координатной плоскости уравнением

$$|2x + y| + |x - y + 3| \leqslant p,$$

будет равна 24?

Задача 210 (ИСАА, 2002, № 7). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Задача 211 (экономический факультет, 1994, № 4). Составьте уравнение окружности наименьшего радиуса, внутри которой помещается множество, заданное на координатной плоскости условием

$$|y - 2x - 1| + |2x - 4| < 4.$$

Задача 212 (химический факультет (весна), 2000, №6). При каждом значении параметра b решите неравенство

$$\sqrt{x+4b^2} > x+2|b|.$$

Задача 213 (химический факультет (весна), 1999, №6). Для каждого значения параметра a, принадлежащего отрезку $[-1,0]$, решите неравенство

$$\log_{x+a}\left(x^2-(a+1)x+a\right) \geqslant 1.$$

Ответы. **200.** $a \in (-1/2; 2)$. **201.** $a_1 \in (2; 2{,}5)$. **Указание.** Напишите неравенства для a_1 и d и решите их методом областей. **202.** $9(\pi+1)/2$. **203.** $S=\pi/3+2\sqrt{3}$. **204.** $P=3\pi/\sqrt{2}+2\sqrt{2}$. **205.** $S=2\pi+7$. **206.** $10\pi+16$. **207.** $[-1;5]$. **208.** $S=15/2$. **209.** $p=6$. **210.** $a \in [-6; 1-\sqrt{13}] \cup [\sqrt{13}-1; 6]$ **211.** $(x-2)^2+(y-5)^2=20$. **212.** Если $|b| \in [0; 1/4]$, то $x \in (0; 1-4|b|)$; если $|b| \in (1/4; 1/2]$, то $x \in (1-4|b|; 0)$; если $|b| > 1/2$, то $x \in [-4b^2; 0)$. **213.** Если $a=-1$, то $x \in (2; +\infty)$; если $a \in (-1; -1/2)$, то $x \in (1; a+2] \cup \cup (1-a; +\infty)$; если $a=-1/2$, то $x \in (1; 3/2) \cup (3/2; +\infty)$; если $a \in (-1/2; 0)$, то $x \in (1; 1-a) \cup [a+2; +\infty)$; если $a=0$, то $x \in [2; +\infty)$.

§1.15. Задачи на целые числа

При решении задач в целых числах важную роль играет понятие делимости чисел. Напомним, что целое число b делит целое число a, если существует такое целое число c, что $a=bc$. Если целое число делится на 2, то оно называется чётным. Чётными являются числа 0, ± 2, ± 4, ± 6, … Общая формула чётного числа: $2n$, $n \in \mathbb{Z}$. Если целое число не делится на 2, то оно называется нечётным. Нечётными являются числа ± 1, ± 3, ± 5, ± 7, … Общая формула нечётного числа: $2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Часто бывает полезно знать признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.

Число делится на 2, если в его десятичной записи последняя цифра чётная.

Число делится на 5, если в его десятичной записи последняя цифра равна либо 5, либо 0.

Число делится на 10, если в его десятичной записи последняя цифра 0. Вообще, число делится на 10^n, если n его последних цифр равны 0.

Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3.

Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9.

Если произведение целых чисел x, y равно заданному числу k, то каждое из чисел является делителем k. Например, уравнение $xy = 21$ допускает следующие восемь решений в целых числах: $(x; y) = (1; 21)$, $(21; 1)$, $(3; 7)$, $(7; 3)$, $(-1; -21)$, $(-21; -1)$, $(-3; -7)$, $(-7; -3)$.

Пример 37. Найдите пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению $3x^2 - 7y^2 - 20xy = 15$.

Решение. Представим исходное уравнение в следующем виде:

$$(3x + y)(x - 7y) = 15.$$

Поскольку мы решаем задачу в целых числах, $3x + y$, $x - 7y$ тоже целые числа. Число 15 можно представить в виде произведения двух целых чисел так: $1 \cdot 15$, $(-1) \cdot (-15)$, $15 \cdot 1$, $(-15) \cdot (-1)$, $5 \cdot 3$, $(-5) \cdot (-3)$, $3 \cdot 5$, $(-3) \cdot (-5)$. Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности восьми систем в целых числах.

$$\mathbf{1}. \quad \begin{cases} 3x + y = 1, \\ x - 7y = 15. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на -3 и сложим с первым. Получаем $22y = -44$, откуда находим $y = -2$. Теперь из первого уравнения находим $x = 1$. Аналогично решим все оставшиеся семь систем.

$$\mathbf{2}. \quad \begin{cases} 3x + y = -1, \\ x - 7y = -15 \end{cases} \iff \quad y = 2,\ x = -1.$$

$$\mathbf{3}. \quad \begin{cases} 3x + y = 15, \\ x - 7y = 1 \end{cases} \qquad \text{решений в целых числах нет.}$$

$$\mathbf{4}. \quad \begin{cases} 3x + y = -15, \\ x - 7y = -1 \end{cases} \qquad \text{решений в целых числах нет.}$$

$$\mathbf{5}. \quad \begin{cases} 3x + y = 5, \\ x - 7y = 3 \end{cases} \qquad \text{решений в целых числах нет.}$$

$$\mathbf{6}. \quad \begin{cases} 3x + y = -5, \\ x - 7y = -3 \end{cases} \qquad \text{решений в целых числах нет.}$$

$$\mathbf{7}. \quad \begin{cases} 3x + y = 3, \\ x - 7y = 5 \end{cases} \qquad \text{решений в целых числах нет.}$$

$$\mathbf{8}. \quad \begin{cases} 3x + y = -3, \\ x - 7y = -5 \end{cases} \qquad \text{решений в целых числах нет.}$$

Ответ. $x = 1$, $y = 2$, $x = -1$, $y = -2$.

Пример 38 (ЕГЭ, 2003, № С4)**.** Из области определения функции

$$y = \log_{0,8}\left(a^a - a^{\frac{8x+5}{x+5}}\right)$$

взяли все натуральные числа и сложили их. Найдите все натуральные значения a, при которых такая сумма будет больше 8, но меньше 15.

Решение. Выпишем ОДЗ данного уравнения:

$$\begin{cases} a > 0, \\ a^a - a^{\frac{8x+5}{x+5}} > 0. \end{cases}$$

Из последнего неравенства заключаем, что $a \neq 1$. Для решения этого неравенства рассмотрим два случая: $a \in (0;1)$ и $a \in (1;+\infty)$.

I. Пусть $a \in (0;1)$. Тогда

$$a^a > a^{\frac{8x+5}{x+5}} \iff a < \frac{8x+5}{x+5} \iff \frac{(8-a)x+5-5a}{x+5} > 0 \iff$$

$$\iff (8-a)\cdot\frac{x+\frac{5a-5}{a-8}}{x+5} > 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов. Корень знаменателя $x_1 = -5$, а числителя $x_2 = -\frac{5a-5}{a-8}$. Поскольку при $a \in (0;1)$ справедливо неравенство $\frac{5a-5}{a-8} = 5+\frac{35}{a-8} < 5$, мы получаем $x_1 < x_2$. Следовательно, решение неравенства при $a \in (0;1)$ имеет вид $x \in (-\infty; x_1)\cup \cup (x_2;+\infty)$. Поскольку в этом случае среди решений содержится бесконечное множество положительных чисел, условие задачи не выполнено.

II. Пусть $a \in (1;+\infty)$. Тогда

$$a^a > a^{\frac{8x+5}{x+5}} \iff a > \frac{8x+5}{x+5} \iff \frac{(8-a)x+5-5a}{x+5} < 0 \iff$$

$$\iff (8-a)\cdot\frac{x+\frac{5a-5}{a-8}}{x+5} < 0.$$

Для дальнейшего исследования придётся рассмотреть три случая, в зависимости от величины числа $8-a$.

IIa. Пусть $a \in (1;8)$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x+\frac{5a-5}{a-8}}{x+5} < 0.$$

Поскольку при $a \in (1;8)$ справедливо неравенство

$$\frac{5a-5}{a-8} = 5 + \frac{35}{a-8} < 5,$$

как и ранее, мы получаем $x_1 < x_2$. Следовательно, метод интервалов даёт решение $x \in (x_1; x_2) = \left(-5; -5 + \frac{35}{8-a}\right)$. При $a \in (1;8)$ выполнено неравенство $-5 + \frac{35}{8-a} > -5 + \frac{35}{8-1} = 0$, откуда вытекает, что $x = -4$, -3, -2, -1, 0 будут целыми решениями при любом a из рассматриваемого промежутка. Найдём те a, при которых сумма всех натуральных решений неравенства будет больше 8, но при этом меньше 15. Из соотношений

$$1+2+3 = 6 < 8, \quad 1+2+3+4 = 10 > 8, \quad 1+2+3+4+5 = 15.$$

вытекает, что $x_2 \in (4;5]$. Отсюда получаем

$$4 < -5 + \frac{35}{8-a} \leqslant 5 \iff 9 < \frac{35}{8-a} \leqslant 10 \iff$$
$$\iff \frac{35}{10} \leqslant 8 - a < \frac{35}{9} \iff$$
$$\iff -\frac{9}{2} \leqslant -a < \frac{37}{9} \iff \frac{37}{9} < a \leqslant \frac{9}{2}.$$

Данные значения параметра a удовлетворяют условию задачи.

IIб. Пусть $a = 8$. Тогда решений нет, так как получается неверное неравенство $0 > 0$.

IIв. Пусть $a \in (8; +\infty)$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x + \frac{5a-5}{a-8}}{x+5} > 0.$$

Поскольку при $a \in (8; +\infty)$ справедливо неравенство

$$\frac{5a-5}{a-8} = 5 + \frac{35}{a-8} > 5,$$

мы получаем $x_1 > x_2$. Метод интервалов даёт решение $x \in (-\infty; x_2) \cup$ $\cup\, (x_1; +\infty)$. И в этом случае среди решений натуральных чисел x бесконечно много, следовательно, условие задачи не выполнено.

Ответ. $a \in (37/9; 9/2]$.

Пример 39 (химический факультет (июль), 2005, № 5 (6))**.** Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\sqrt{2x - y - 3} + \sqrt{2y - x + 3} = 2\sqrt{3 - x - y}.$$

Решение. Найдём ОДЗ данного уравнения:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 \geqslant 0, \\ 2y - x + 3 \geqslant 0, \\ 3 - x - y \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y \leqslant 2x - 3, \\ y \geqslant \dfrac{x-3}{2}, \\ y \leqslant x - 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x-3}{2} \leqslant y \leqslant 2x - 3, \\ \dfrac{x-3}{2} \leqslant y \leqslant x - 3. \end{cases} \tag{1.10}$$

Из последней системы как следствие получаем

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} \leqslant 2x - 3, \\ \dfrac{x-3}{2} \leqslant x - 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x \leqslant 9, \\ 3 \leqslant 3x \end{cases} \iff 1 \leqslant x \leqslant 3.$$

I. Пусть $x = 1$. Тогда из системы (1.10) следует

$$\begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 2, \\ -1 \leqslant y \leqslant -1 \end{cases} \iff y = -1.$$

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что $(x; y) = (1; -1)$ не является решением:

$$\sqrt{2 + 1 - 3} + \sqrt{-2 - 1 + 3} = 0 \neq 2\sqrt{3 - 1 + 1}.$$

II. Пусть $x = 2$. Тогда из системы (1.10) следует, что

$$\begin{cases} -1/2 \leqslant y \leqslant 1, \\ -1/2 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases} \iff y = 0; 1.$$

Подставим в исходное уравнение $(x; y) = (2; 0)$:

$$\sqrt{4 - 0 - 3} + \sqrt{0 - 2 + 3} = 2\sqrt{3 - 2 - 0}.$$

Таким образом, $(x; y) = (2; 0)$ является решением исходного уравнения.

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что другая пара $(x; y) = (2; 1)$ не является решением:

$$\sqrt{4 - 1 - 3} + \sqrt{2 - 2 + 3} = \sqrt{3} \neq 0 = 2\sqrt{3 - 2 - 1}.$$

III. Пусть $x = 3$. Тогда из системы (1.10) следует

$$\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 0, \\ 0 \leqslant y \leqslant 3 \end{cases} \iff y = 0.$$

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что пара $(x; y) = (3; 0)$ не является решением:

$$\sqrt{6-0-3} + \sqrt{0-3+3} = \sqrt{3} \neq 0 = 2\sqrt{3-3-0}.$$

Таким образом, единственное целочисленное решение данного уравнения: $(x; y) = (2; 0)$.

Ответ. $x = 2$, $y = 0$.

Задача 214 (физический факультет (май), 2001, № 7)**.** Для каждого целого значения m найдите все решения уравнения

$$\log_{\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)}(3x)^{m^2+1} = m^2 + 1.$$

Задача 215 (химический факультет (май), 1993, № 5)**.** Найдите пары целых чисел m и n, удовлетворяющие уравнению

$$6m^2 - 2n^2 + mn = 3.$$

Задача 216 (ЕГЭ (демо), 2002, № С3)**.** При каком $x \in \{1, 2, \ldots, 97, 98, 99\}$ значение выражения

$$\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}} - \sqrt{1 - \frac{2}{x+2}}\right) : \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+2}} - 2\right) : \left(1 + \sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)$$

ближе всего к 73?

Задача 217 (психологический факультет, 1985, № 6)**.** Найдите все значения a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющая уравнению

$$-15x^2 + 11xy - 2y^2 = 7$$

и неравенствам $x < y$, $2a^2x + 3ay < 0$.

Задача 218 (высшая школа бизнеса (июль), 2004, № 6 (8))**.** Найдите все пары целых неотрицательных чисел $(k; m)$, являющихся решениями уравнения

$$2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36.$$

Задача 219 (ИСАА, 1997, № 7)**.** Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$$3xy - 14x - 17y + 71 = 0.$$

Задача 220 (ЕГЭ (демо), 2003, № C4)**.** Найдите все положительные значения параметра a, при которых в области определения функции $y = (a^x - a^{ax+2})^{-1/2}$ есть двузначные натуральные числа, но нет ни одного трехзначного натурального числа.

Задача 221 (факультет почвоведения (май), 2003, № 4)**.** Найдите все целые решения $(x; y; z)$ уравнения

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

Задача 222 (механико-математический факультет (устный экзамен), 2000)**.** Найдите все пары $(m; n)$ натуральных чисел, для которых выполнено равенство

$$\log_m(n - 7) + \log_n(5m - 17) = 1.$$

Задача 223 (экономический факультет (отделение экономики), 1995, № 5)**.** Найдите все $x \in [-3; 1]$ для которых неравенство

$$x \cdot \big(\pi(x + 1) - 4\operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11)\big) > 0$$

выполняется при любых целых m.

Задача 224 (химический факультет (май), 1995, № 5)**.** Найдите все пары целых чисел m и n, удовлетворяющие уравнению

$$m^2 + amn - bn^2 = 0,$$

где $a = 1953^{100}$, $b = 1995^{100}$.

Задача 225 (химический факультет (июль), 2005, № 5 (6))**.** Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\sqrt{2x + y - 4} + \sqrt{5 - x - 2y} = 2\sqrt{2 - x + y}.$$

Задача 226 (биологический факультет, 1996, № 5)**.** Найдите все пары натуральных чисел t и s, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} 2t + 47 < 22s - 2s^2, \\ 4s \geqslant 7t + 14. \end{cases}$$

Задача 227 (факультет ВМиК (май), 2002, № 5). При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \sin(2\pi\sqrt{a^2 - x^2}) = 0, \\ 2 \cdot 3^{|ax|} + 3^{2-|ax|} \leqslant 19 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

Задача 228 (химический факультет (весна), 1997, № 6). Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy.$$

Задача 229 (экономический факультет (отделение экономики), 2001, № 7). Найдите наибольшие целочисленные значения u и v, для которых уравнение $364a^2u - 55v = -20020a^4$ выполняется ровно при четырёх различных значениях a, два из которых относятся как $3 : 5$.

Задача 230 (факультет фундаментальной медицины (май), 2003, № 7). Количество сотрудников корпорации ежегодно возрастало в геометрической прогрессии и за 6 лет увеличилось на 20615 человек. Найдите первоначальную численность сотрудников корпорации.

Задача 231 (механико-математический факультет (май), 1990, № 5 (6)). Найдите все тройки целых чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющих неравенству

$$\log_2(2x + 3y - 6z + 3) + \log_2(3x - 5y + 2z - 2) + \\ + \log_2(2y + 4z - 5x + 2) > z^2 - 9z + 17.$$

Задача 232 (экономический факультет (отделение политической экономии), 1989, № 6). Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству

$$9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0.$$

Задача 233 (факультет ВМиК (апрель), 1996, № 5). Найдите все целочисленные решения уравнения

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = 0.$$

Задача 234 (психологический факультет, 1998, № 6). Найдите все целые значения параметров a и b, при которых уравнение

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b}\right) - b \cdot 2^{\sin(\pi bx)} - \left|\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b}\right) + b \cdot 2^{\sin(\pi bx)}\right| = 2ab$$

имеет не менее 10 различных решений.

Задача 235 (психологический факультет, 1999, №6). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых ровно пять различных наборов $(x; y; z)$ натуральных чисел x, y, z удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ ayz + axz + axy > xyz. \end{cases}$$

Ответы. **214.** $m = 0$, $x = 3$; $m = \pm 1$, $x = \pm(3 \pm 2\sqrt{2})/2$; $m = \pm 2$, $x = (3 \pm \sqrt{5})/2$; $m = \pm 3$, $x = \pm 3/2$. **215.** $m = 1$, $n = -1$ и $m = -1$, $n = 1$. **216.** 72. **Указание.** Упростите выражение и воспользуйтесь оценкой $|x| < \sqrt{x(x+2)} < |x+1|$. **217.** $-13/3 < a \leqslant -19/5$. **218.** $\{(9; 9)\}$. **219.** $(4; 3)$, $(6; 13)$, $(14; 5)$. **220.** $(0,8; 0,98)$. **221.** $(7k; 3k; 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$. **222.** $m = 4$, $n = 9$; $m = 5$, $n = 8$. **223.** $[-3; -2) \cup \{1\}$. **224.** $m = 0$, $n = 0$. **225.** $x = 2$, $y = 1$. **226.** $(1; 6)$, $(1; 7)$, $(2; 7)$. **227.** $|a| \in (1; \sqrt{2}]$. **228.** $(0; 0)$, $(2; 2)$, $(0; 3)$, $(3; 0)$. **229.** $u = -187$; $v = -819$. **230.** 1984. **231.** $(x; y; z) = (5; 4; 4)$. **232.** $(0; 2)$, $(-2; 0)$, $(0; 3)$, $(2; 1)$. **Указание.** Запишите уравнение как квадратное относительно y (или x) и разложите его на множители (это равносильно тому, чтобы решить квадратное уравнение). **233.** $(2; 3)$, $(2; -3)$, $(-2; 3)$, $(-2; -3)$. **234.** $a = -2$, $b = 4; 5; \ldots$; $a = -1$, $b = 3; 4; 5; \ldots$ **235.** $a \in (5/11; 6/13]$.

§1.16. Задачи с целой и дробной частью числа

Определение 1.16.1. Для произвольного числа $x \in \mathbb{R}$ определим его целую часть как наибольшее целое число, не превосходящее x. Целую часть числа x обозначают $[x]$.

Из определения следует, что если представить $x = k + \alpha$, где $k \in \mathbb{Z}$, $x - 1 < k \leqslant x$, то k — целая часть числа. Приведём в качестве примера простые вычисления: $[0{,}7] = 0$, $[-0{,}7] = -1$, $[3{,}1] = 3$, $[4] = 4$, $[-1{,}33] = -2$. График функции $y = [x]$ представляет собой кусочно постоянную функцию, возрастающую на всей числовой оси (см. рис. 1.72).

Определение 1.16.2. Для произвольного числа $x \in \mathbb{R}$ определим его дробную часть равенством $\{x\} = x - [x]$.

Из данного определения и представления $x = k + \alpha$, где $k \in \mathbb{Z}$, $x - 1 < k \leqslant x$, следует, что α — дробная часть числа. Приведём в качестве примера простые вычисления: $\{0{,}7\} = 0{,}7$, $\{-0{,}7\} = 0{,}3$,

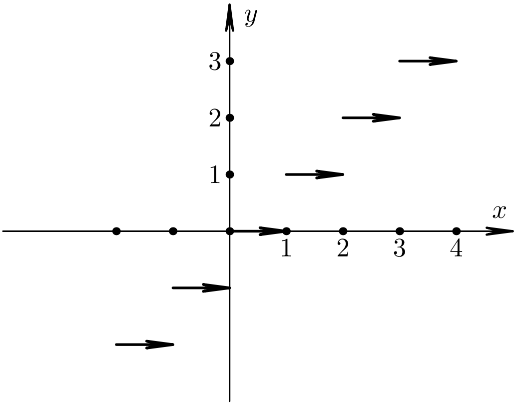

Рис. 1.72. Целая часть числа

$\{3{,}1\} = 0{,}1$, $\{4\} = 0$, $\{-1{,}33\} = 0{,}67$. График функции $y = x$ представляет собой кусочно непрерывную функцию, неотрицательную (т. е $\{x\} \geqslant 0$) и возрастающую на каждом промежутке вида $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$ (см. рис. 1.73).

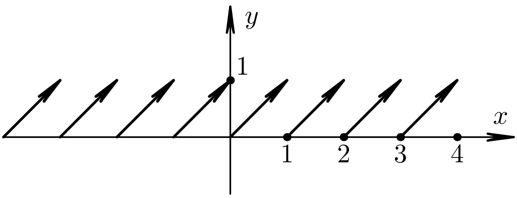

Рис. 1.73. Дробная часть числа

Пример 40. Решите уравнение

$$\frac{1}{\{x\}} + \frac{1}{[x]} = -\frac{1}{x}.$$

Решение. Прежде всего найдём ОДЗ данного уравнения. Очевидно, что ОДЗ будет иметь вид $\mathbb{R} \backslash \{[0, 1] \cup \{k\}_{k \in \mathbb{Z}}\}$. У исходного уравнения нет решений при $x > 0$ из ОДЗ, поскольку выражение в левой части положительно, а в правой отрицательно. Решим уравнение для отрицательных x:

$$\frac{1}{\{x\}}+\frac{1}{[x]}=-\frac{1}{x} \iff \frac{[x]+\{x\}}{\{x\}[x]}=-\frac{1}{[x]+\{x\}} \iff$$
$$\iff ([x]+\{x\})^2=-\{x\}[x] \iff [x]^2+3[x]\{x\}+\{x\}^2=0 \iff$$
$$\iff \left(\frac{[x]}{\{x\}}\right)^2+3\frac{[x]}{\{x\}}+1=0 \iff \left(\frac{[x]}{\{x\}}+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0.$$

Отсюда получаем

$$[x]=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\{x\}. \tag{1.11}$$

Но из оценок

$$0<\{x\}<1, \quad -3<\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}<0,$$

вытекает, что либо $[x]=-1$, либо $[x]=-2$, либо $[x]=-3$. Пусть $[x]=-1$, тогда из равенства (1.11) следует, что либо

$$\{x\}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}-1,$$

либо

$$\{x\}=\frac{2}{3-\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}>1.$$

Последний случай невозможен. Пусть $[x]=-2$, тогда снова получаем две возможности: либо

$$\{x\}=\frac{4}{3+\sqrt{5}}=3-\sqrt{5} \Longrightarrow x=-2+3-\sqrt{5},$$

либо

$$\{x\}=\frac{4}{3-\sqrt{5}}=3+\sqrt{5}>1,$$

что невозможно. И, наконец, при $[x]=-3$ получаем, что оба значения, полученных по формуле (1.11), удовлетворяют противоречивому неравенству

$$\{x\}=\frac{6}{3\pm\sqrt{5}}=\frac{3(3\mp\sqrt{5})}{2}>1.$$

Ответ. $x=-1+(3-\sqrt{5})/2$, $x=1-\sqrt{5}$.

Пример 41. Решите уравнение $x^3 - 3 = [x]$.

Решение. Воспользуемся представлением $[x] = x - \{x\}$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$x^3 - x = 3 - \{x\}.$$

Поскольку $0 < \{x\} < 1$, мы получаем $2 < 3 - \{x\} \leqslant 3$. Покажем, что левая часть исходного уравнения не лежит в промежутке $(2; 3]$ при $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. Действительно,

$$\begin{aligned} x \geqslant 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^3 - x = x(x^2-1) \geqslant 6, \\ x \leqslant -1 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^3 - x = x(x^2-1) \leqslant 0, \\ x \in [-1; 1] \quad &\Longleftrightarrow \quad |x^3 - x| = |x(x^2-1)| \leqslant 1. \end{aligned}$$

Следовательно, решение исходного уравнения должно лежать в интервале $1 < x < 2$. Тогда $x = 1 + \{x\}$ и

$$x^3 - x = 3 - \{x\} \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 - 1 - \{x\} = 3 - \{x\} \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad x^3 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{4}.$$

Ответ. $x = \sqrt[3]{4}$.

Пример 42. Решите в целых числах

$$\left[\frac{x}{1!}\right] + \left[\frac{x}{2!}\right] + \left[\frac{x}{3!}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{2007!}\right] = 1005.$$

Решение. Поскольку при $x < 0$ все слагаемые в левой части отрицательны, решение удовлетворяет неравенству $x \geqslant 0$. Из неравенства $720 + \dfrac{720}{2} > 1005$ вытекает, что решение удовлетворяет неравенству $x < 6! = 720$. Но поскольку при $x < 720$ справедливо неравенство

$$\left[\frac{x}{k!}\right] = 0, \qquad k \geqslant 6,\ k \in \mathbb{N},$$

исходное уравнение равносильно следующему уравнению:

$$\left[\frac{x}{1!}\right] + \left[\frac{x}{2!}\right] + \left[\frac{x}{3!}\right] + \left[\frac{x}{4!}\right] + \left[\frac{x}{5!}\right] = 1005, \qquad x \in \mathbb{N},\ x < 720.$$

Представим x в виде

$$x = a \cdot 5! + b \cdot 4! + c \cdot 3! + d \cdot 2! + e \cdot 1!, \tag{1.12}$$

где a, b, c, d, e — целые неотрицательные числа, причём $a \leqslant 5$, $b \leqslant 4$, $c \leqslant 3$, $d \leqslant 2$, $e \leqslant 1$. Покажем, что данное представление единственно. Поделив уравнение (1.12) на 5!, находим коэффициент a из равенства $a = \left[\frac{x}{5!}\right]$. Коэффициент b находиться аналогично при найденном коэффициенте a из равенства $x - a \cdot 5! = b \cdot 4! + c \cdot 3! + d \cdot 2! + e \cdot 1!$. Продолжая рассуждать аналогично, мы доказываем, что представление (1.12) единственное.

Из этого представления для x вытекает, что

$$\begin{aligned}
\left[\frac{x}{1!}\right] &= a \cdot 5! + b \cdot 4! + c \cdot 3! + d \cdot 2! + e \cdot 1!,\\
\left[\frac{x}{2!}\right] &= a \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + b \cdot 4 \cdot 3 + c \cdot 3 + d,\\
\left[\frac{x}{3!}\right] &= a \cdot 5 \cdot 4 + b \cdot 4 + c,\\
\left[\frac{x}{4!}\right] &= a \cdot 5 + b,\\
\left[\frac{x}{5!}\right] &= a.
\end{aligned}$$

Складывая все полученные равенства и подставляя в исходное уравнение, получаем

$$206a + 41b + 10c + 3d + e = 1005.$$

Поскольку $41b+10c+3d+e \leqslant 41\cdot4+10\cdot3+3\cdot2+1 = 201$, мы получаем $802 \leqslant 206a \leqslant 1005$, следовательно, $a = 4$. Теперь остаётся определить оставшиеся коэффициенты из уравнения $41b + 10c + 3d + e = 181$. Рассуждая аналогично, мы получаем $b = 4$, $c = 1$, $d = 2$, $e = 1$. Следовательно, $x = 4 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + 3! + 2 \cdot 2! + 1 = 587$.

Ответ. $x = 587$.

Задача 236. Сравните числа $\operatorname{ctg} 1$ и $\{\pi/2\}$.

Задача 237 (факультет ВМиК (устный экзамен))**.** Найдите все решения уравнения $[x]^2 = [x^2]$.

Задача 238 (факультет ВМиК (устный экзамен))**.** Решите неравенство

$$[x] \cdot \{x\} < x - 1.$$

Задача 239 (механико-математический факультет (устный экзамен), 1998)**.** Найдите количество корней уравнения

$$\{x\} - \frac{1}{2} = \log_2 \frac{a}{x}$$

для каждого значения $a \in [1/\sqrt{2}; 3/2]$. Здесь $\{x\}$ означает дробную часть числа x.

Задача 240 (факультет ВМиК (июль), 2005, № 5 (6))**.** Найдите все значения параметра a, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$, при которых уравнение $\sin^5(3x + a) = \cos(\pi \cdot [x])$ имеет на отрезке $[1; \pi]$ нечётное число решений.

Задача 241 (факультет ВМиК (июль), 2005, № 5 (6))**.** Найдите все значения параметра a, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$, при которых уравнение $\cos^3(2x + a) = |\sin(\pi \cdot [x]/2)|$ имеет на отрезке $[1; \pi]$ нечётное число решений.

Ответы. **236.** $\operatorname{ctg} 1 > \{\pi/2\}$. **Указание.** Докажите, что $\operatorname{ctg} 1 = \operatorname{ctg}[\pi/2] = \operatorname{tg}\{\pi/2\} > \{\pi/2\}$. **237.** $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in [m; \sqrt{m^2+1})$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ **238.** $[2; +\infty)$. **239.** 2. **240.** $a \in [\pi/2; 3\pi/2 - 3] \cup \cup (5\pi/2 - 6; 7\pi/2 - 9]$. **241.** $a \in (2\pi - 6; 3\pi/2 - 4] \cup (5\pi/2 - 6; 2\pi - 4)$.

§1.17. Введение параметра для решения задач

При решении задач могут обнаружиться связи и аналогии, существенно облегчающие процесс решения. Источником таких связей часто служат тригонометрические формулы и иные тождества. Например, если в алгебраическом уравнении нужно искать корни только на отрезке $[-1; 1]$ либо ОДЗ исходного уравнения состоит из отрезка, лежащего в $[-1; 1]$, то нужно попытаться отыскать какую-нибудь тригонометрическую замену, например $x = \cos\alpha$, $x = \sin\alpha$ либо $x = \cos^k\alpha$, $x = \sin^k\alpha$. Но, конечно же, тригонометрические замены отнюдь не единственны.

Пример 43 (высшая школа бизнеса (июль), 2004, № 7 (8))**.** Найдите наибольшее значение выражения $3x - 2y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию $4x^2 + y^2 = 16$.

Решение. Поскольку уравнение $4x^2 + y^2 = 16$ — уравнение эллипса, можем сделать тригонометрическую замену $x = 2\sin t$, $y = 4\cos t$. Действительно, при такой замене уравнение $4x^2 + y^2 = 16$ переходит в основное тригонометрическое тождество $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

Используя данную замену, получаем

$$3x - 2y = 6\sin t - 8\cos t = 10\left(\frac{3}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t\right) =$$

$$= 10\,(\sin t\cos\varphi - \cos t\sin\varphi) = 10\sin(t - \varphi) \leqslant 10.$$

Отсюда видно, что наибольшее значение выражения $3x - 2y$ равно 10, причём максимальное значение достигается, например, при $t^* = \pi/2 + \varphi = \pi/2 + \arcsin(4/5)$, т. е. при

$$x = 2\sin t^* = 2\cos(\arcsin(4/5)) = 6/5,$$
$$y = 4\cos t^* = -4\sin(\arcsin(4/5)) = -16/5.$$

Ответ. 10.

Пример 44 (химический факультет (май, тестовый экзамен), 2004, № 5 (6)). Решите уравнение

$$\sqrt{1-x^2}(1-4x^2) + x(3-4x^2) = \sqrt{2}.$$

Решение. Прежде всего заметим, что ОДЗ данного уравнения состоит из отрезка $[-1; 1]$. Поэтому возможна замена

$$x = \sin t, \qquad t \in [-\pi/2; \pi/2].$$

Действительно, для $t \in [-\pi/2; \pi/2]$ множеством значений функции $\sin t$ будет отрезок $[-1; 1]$. Уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{1-x^2}(4(1-x^2)-3) + x(3-4x^2) = \sqrt{2} \iff$$
$$\iff \cos t(4\cos^2 t - 3) + \sin t(3 - 4\sin^2 t) = \sqrt{2} \iff$$
$$\iff \cos 3t + \sin 3t = \sqrt{2}.$$

Решаем уравнение $\cos 3t + \sin 3t = \sqrt{2}$ при помощи введения вспомогательного угла:

$$\cos 3t + \sin 3t = \sqrt{2} \iff$$
$$\iff (1/\sqrt{2})\cos 3t + (1/\sqrt{2})\sin 3t = 1 \iff$$
$$\iff \cos 3t \sin(\pi/4) + \sin 3t \cos(\pi/4) = 1 \iff$$
$$\iff \sin(3t + \pi/4) = 1.$$

Отсюда находим

$$3t + \pi/4 = \pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \iff t = \pi/12 + 2\pi n/3, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Остаётся выписать корни из отрезка $[-\pi/2; \pi/2]$. Как несложно проверить, неравенствам

$$-\pi/2 \leqslant \pi/12 + 2\pi n/3 \leqslant \pi/2, \quad n \in \mathbb{Z},$$

корни удовлетворяют лишь при $n = 0$, т. е.

$$\begin{aligned}x &= \sin(\pi/12) = \sin(\pi/3 - \pi/4) = \\ &= \sin(\pi/3)\cdot\cos(\pi/4) - \cos(\pi/3)\cdot\sin(\pi/4) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Ответ. $x = \sin(\pi/12) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$.

Пример 45. Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} - xy = 2, \\ \dfrac{z}{y} - yz = 2, \\ \dfrac{x}{z} - zx = 2. \end{cases}$$

Решение. ОДЗ данной системы имеет вид $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Систему на ОДЗ запишем в виде

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1-x^2}, \\ z = \dfrac{2y}{1-y^2}, \\ x = \dfrac{2z}{1-z^2}. \end{cases}$$

Мы воспользовались тем, что $x = \pm 1$ не удовлетворяет первому уравнению исходной системы, $y = \pm 1$ — второму и $z = \pm 1$ — третьему. Поэтому сделанное преобразование равносильное.

Замечаем, что при замене $x = \operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$, система допускает простое решение

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1-x^2}, \\ z = \dfrac{2y}{1-y^2}, \\ x = \dfrac{2z}{1-z^2}. \end{cases} \iff \begin{cases} y = \operatorname{tg} 2\alpha, \\ z = \operatorname{tg} 4\alpha, \\ x = \operatorname{tg} 8\alpha. \end{cases}$$

Действительно, система свелась к решению уравнения $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 8\alpha$, а именно к системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 8\alpha, \\ \operatorname{tg}\alpha \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin 7\alpha = 0, \\ \cos\alpha \neq 0, \\ \cos 8\alpha \neq 0, \\ \operatorname{tg}\alpha \neq 0. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, находим $\alpha = \pi n/7$, $n \in \mathbb{Z}$. Учитывая условие $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$, получаем окончательное решение.

Ответ. $(x; y; z) = (\operatorname{tg}\alpha; \operatorname{tg} 2\alpha; \operatorname{tg} 4\alpha)$, где $\alpha = \pm\pi/7$, $\pm 2\pi/7$, $\pm 3\pi/7$.

Задача 242 (психологический факультет, 1993, № 2)**.** Решите неравенство[1]

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Задача 243 (геологический факультет (отделение геофизики), 1981, № 6)**.** Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$$

Задача 244 (экономический факультет (отделение менеджмента, апрель), 2003, № 4 (5))**.** Решите уравнение

$$6x \cdot \sqrt{1-9x^2} + 18x^2 - 3\sqrt{2}x - 1 = 0.$$

Задача 245 (биологический факультет, 1985, № 5 (5))**.** Сколько корней на отрезке $[0; 1]$ имеет уравнение

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1) = 1?$$

Задача 246 (высшая школа бизнеса (июль), 2004, № 7 (8))**.** Найдите наименьшее значение выражения $2x - 4y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Задача 247 (химический факультет и факультет наук о материалах (июль), 2003, № 6 (6))**.** При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (x+\sqrt{2}z)^2 + (y+\sqrt{2}t)^2 = 25 + 2a\sqrt{25-a^2}, \\ x^2 + y^2 = a^2, \\ z^2 + t^2 = (25-a^2)/2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

---

[1] Конечно же, данный пример решается и без введения параметра.

Задача 248 (химический факультет (май, тестовый экзамен), 2004, №5 (6))**.** Решите уравнение

$$4x\sqrt{1-x^2}(2x^2-1)=8x^2(1-x^2)+\sqrt{2}-1.$$

Задача 249 (механико-математический факультет (март), 2002, №5 (6))**.** Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x}-9xy=2, \\ \dfrac{z}{y}-9yz=6, \\ \dfrac{3x}{z}-3zx=2. \end{cases}$$

Задача 250 (факультет глобальных процессов, 2005, №8 (8))**.** Переменные x, y связаны условием $x^2+y^2-6x+4y+10=0$. Найдите все значения параметра a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значениями выражения $2ax-3y-10$ больше 12.

Задача 251 (психологический факультет, 1986, №6 (6))**.** Найдите наибольшее из значений, которые принимает выражение $x+3y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2+xy+4y^2\leqslant 3$.

Задача 252 (механико-математический факультет (март), 2002, №5 (6))**.** Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x}-xy=1, \\ \dfrac{z}{y}-4yz=2, \\ \dfrac{x}{z}-4zx=4. \end{cases}$$

Задача 253 (биологический факультет, 1989, № 5)**.** Числа x, y, z таковы, что $x^2+3y^2+z^2=2$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x+y-z$?

Задача 254 (факультет ВМиК (июль), 1998, № 5)**.** Найдите все значения параметра a, при которых существуют $(x;y)$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \max(2-3y, y+2)\leqslant 5, \\ \sqrt{a^2+(6/\pi)\arccos\sqrt{1-x^2}-16-(2/\pi^2)\arcsin x\cdot(\pi+2\arcsin x)}\geqslant \\ \qquad\geqslant y^2+2ay+7. \end{cases}$$

Задача 255 (механико-математический факультет (май), 2002, №6 (6)). При каких x оба числа

$$\frac{x^2+4x-1}{7x^2-6x-5} \quad \text{и} \quad \frac{1-x}{1+x}$$

целые?

Задача 256 (механико-математический факультет (июль), 2002, №6 (6)). Найдите минимальное значение выражения $(x+y-z)^2$ при условии, что числа x, y и z удовлетворяют одновременно каждому из неравенств

$$1 \leqslant (x+y)^2 \leqslant 4/3, \quad 8 \leqslant (y+z)^2 \leqslant 9, \quad 10 \leqslant (z+x)^2 \leqslant 11.$$

Ответы. **242.** $[0;(3-\sqrt{5})/6)$. **243.** $x_1=-1/\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2-\sqrt{3}}/2$. **244.** $\pm\sqrt{2}/6$, $(\sqrt{2}+\sqrt{6})/12$. **245.** $x_1=\cos(\pi/9)$, $x_2=\cos(2\pi/7)$, $x_3=\cos(\pi/3)=1/2$. **246.** -10. **247.** $a\in[-5;5]$. **248.** $\pi/16+\pi n/4$, $n\in\mathbb{Z}$. **249.** $\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{3};\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{3};\operatorname{tg}4\alpha\right)$, $\alpha=\pm\frac{\pi}{7},\pm\frac{2\pi}{7},\pm\frac{3\pi}{7}$. **250.** $a\in(-\infty;-\sqrt{3}/2)\cup\cup(\sqrt{3}/2;+\infty)$. **251.** $2\sqrt{2}$. **252.** $\left(\operatorname{tg}\alpha;\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{2};\frac{\operatorname{tg}4\alpha}{2}\right)$, $\alpha=\pm\frac{\pi}{7},\pm\frac{2\pi}{7},\pm\frac{3\pi}{7}$. **253.** $4\sqrt{6}/3$. **254.** $a\in(-\infty;-\sqrt{13}]\cup[11/3;+\infty)$. **255.** $x=1,-1/3,-1/2,-3/4$. **256.** $(3+\sqrt{8}-\sqrt{11})^2/4$.

§1.18. Использование особенностей функций (монотонность, чётность, нечётность, непрерывность)

Выше мы определили четные функции, удовлетворяющие равенству $f(x)=f(-x)$ на симметричной области определения, добавим к этому определение нечётной функции как функции, удовлетворяющей равенству $f(-x)=-f(x)$ на симметричной области определения.

Напомним также определение монотонных функций.

Определение 1.18.1. Функция $f(x)$ называется *неубывающей* на промежутке X, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка, удовлетворяющих неравенству $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)\leqslant f(x_2)$. Функция называется *возрастающей* на промежутке X, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка, удовлетворяющих неравенству $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$. Аналогично функция $f(x)$ называется *невозрастающей* на промежутке X, если для любых x_1, x_2

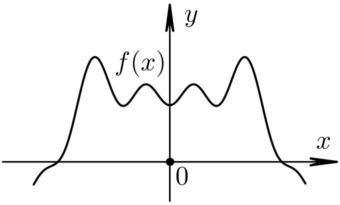

Рис. 1.74. График чётной функции

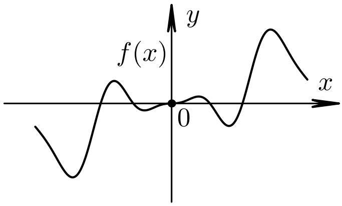

Рис. 1.75. График нечётной функции

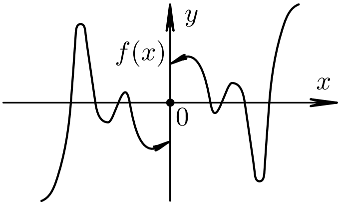

Рис. 1.76. График нечётной функции

из этого промежутка, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Функция называется *убывающей* на промежутке X, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Общее название для возрастающих, убывающих, невозрастающих, неубывающих функций на промежутке — *монотонные* функции. При этом возрастающие и убывающие функции часто называют *строго монотонными*. Отметим основные свойства строго монотонных функций, которые находят важное применение при решении задач.

I. Из равенства $f(x_1) = f(x_2)$ вытекает, что $x_1 = x_2$, и наоборот.

II. Для любого действительного числа A уравнение $f(x) = A$ может иметь не более одного решения, т. е. либо решений нет, либо решение единственно.

Из данных свойств мы делаем важный вывод, что если для уравнения $f(x) = 0$ мы угадываем один корень x_0 и функция $f(x)$ строго монотонна, то x_0 — единственное решение уравнения (других корней нет).

Приведём примеры монотонных функций:

A) $f(x) = x$. **B**) $f(x) = \operatorname{arctg} x$. **C**) $f(x) = x - \sin x$.

Докажем, что последняя функция монотонна. Действительно, это можно проверить с помощью производной, но мы проведём доказа-

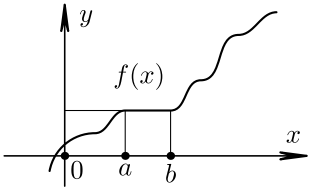

Рис. 1.77. График неубывающей функции (функция постоянна на $[a;b]$)

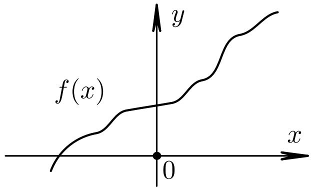

Рис. 1.78. График возрастающей функции

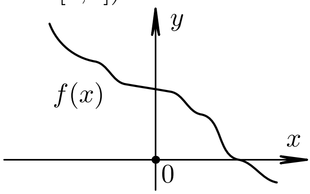

Рис. 1.79. График убывающей функции

тельство, не используя производной. Сначала докажем важное для анализа неравенство

$$|\sin x| < |x|, \quad x \neq 0. \tag{1.13}$$

Для доказательства неравенства (1.13) сначала установим, что при $0 < x < \pi/2$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x, \tag{1.14}$$

которое означает, что площадь треугольника $\triangle OAB$ меньше, чем площадь кругового сектора OAB (см. рис. 1.80) (на рисунке изображена окружность единичного радиуса). При $x \geqslant \pi/2$ неравенство (1.13) очевидно, поскольку $|\sin x| \leqslant 1 < \pi/2 \leqslant x$. Остаётся лишь заметить, что для оставшихся значений $x < 0$ неравенство (1.13) вытекает из чётности функции $g(x) = |\sin x| - |x|$.

Таким образом, справедливы соотношения

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\cos\frac{x_2 + x_1}{2} \leqslant 2\left|\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\cos\frac{x_2 + x_1}{2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\right| < 2\left|\frac{x_2 - x_1}{2}\right| = |x_2 - x_1|, \quad x_2 \neq x_1.$$

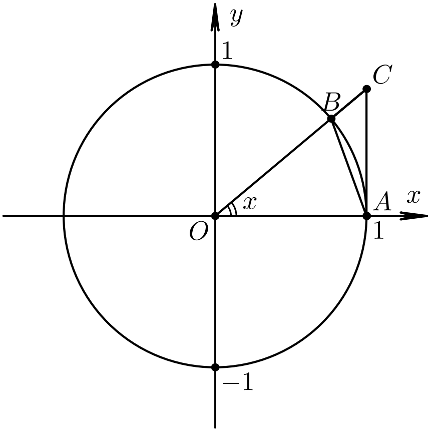

Рис. 1.80

Теперь из условия $x_2 > x_1$ мы получаем

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2 - \sin x_2 - (x_1 - \sin x_1) =$$
$$= (x_2 - x_1) - (\sin x_2 - \sin x_1) > (x_2 - x_1) - |x_2 - x_1| = 0,$$

т. е. мы доказали, что функция $f(x) = x - \sin x$ строго возрастающая.

Напомним одно важное свойство непрерывных функций, которым мы будем пользоваться: *непрерывная функция принимает все промежуточные значения*. Это означает, что если на отрезке $[a; b]$ максимум и соответственно минимум равны B и A, то для любого значения $C \in [A; B]$ существует такое $c \in [a; b]$, что $f(c) = C$, и множеством значений у непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ будет весь отрезок $[A; B]$.

Пример 46 (ЕГЭ, 2003, № С2)**.** При каких значениях p уравнение

$$5\cos 2x + \frac{2p}{\sin x} = -29$$

имеет решения?

Решение. ОДЗ данного уравнения имеет вид $\sin x \neq 0$. Домножим на $\sin x$ исходное уравнение:

$$5(1 - 2\sin^2 x)\sin x + 2p = -29\sin x \quad \Longleftrightarrow \quad p = 5\sin^3 x - 17\sin x.$$

Последнее уравнение будет иметь решения тогда и только тогда, когда p будет принимать значения из области значений функции

$$5\sin^3 x - 17\sin x.$$

Введём новую переменную $t = \sin x$. На ОДЗ переменная t принимает значения $t \in [-1; 0) \cup (0; 1]$.

Найдём область значений функции

$$f(t) = 5t^3 - 17t$$

для $t \in [-1; 0) \cup (0; 1]$. Заметим, что данная функция нечётная. Действительно, $f(-t) = -f(t)$. Следовательно, достаточно найти область значений для переменной $t \in (0; 1]$. Докажем, что на данном участке функция $f(t)$ строго монотонна. Рассмотрим производную данной функции $f'(t) = 15t^2 - 17$. На множестве $(0; 1]$ справедливо неравенство $f'(t) < 0$, т. е. функция монотонно убывает. Так как функция $f(t)$ является и монотонной, и непрерывной, на интервале $(0; 1)$ она принимает все промежуточные значения от минимального $f(1) = -12$ до максимального $f(0) = 0$. Следовательно, множество значений функции $f(t)$ на $t \in (0; 1]$ равно $[-12; 0)$, а учитывая нечётность функции $f(t)$, мы заключаем, что множество её значений на $[-1; 0) \cup (0; 1]$ равно $[-12; 0) \cup (0; 12]$.

Ответ. $p \in [-12; 0) \cup (0; 12]$.

Пример 47 (высшая школа бизнеса (июль), 2003, № 8)**.** Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$25x^5 - 25(p-1)x^3 + 4(p+5)x = 0$$

имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Функция $f(x) = 25x^5 - 25(p-1)x^3 + 4(p+5)x$ нечётная. Действительно, $f(-x) = -f(x)$. Отсюда замечаем, что если x_0 — отличный от нуля корень уравнения, то $-x_0$ тоже является решением уравнения, так как $f(-x_0) = -f(x_0) = 0$. Таким образом, корни имеют вид

$$0, \quad \pm x_1, \quad \pm x_2.$$

Но так как по условию задачи решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию, корни можно записать в виде

$$0, \quad \pm d, \quad \pm 2d,$$

где d — разность арифметической прогрессии. Запишем полином пятой степени с корнями 0, $\pm d$, $\pm 2d$ и старшим коэффициентом, равным 25:

$$25x(x^2 - d^2)(x^2 - 4d^2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 25x(x^4 - 5d^2x^2 + 4d^4) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad 25x^5 - 5 \cdot 25d^2x^3 + 4 \cdot 25d^4x = 0.$$

Так как многочлены

$$25x^5 - 5\cdot 25d^2x^3 + 4\cdot 25d^4x \qquad \text{и} \qquad 25x^5 - 25(p-1)x^3 + 4(p+5)x$$

имеют ровно 5 одинаковых корней и одинаковый старший коэффициент при степени x^5, эти многочлены тождественно равны. Отсюда

$$\begin{cases} (p-1) = 5d^2, \\ p+5 = 25d^4 \end{cases} \iff \begin{cases} p-1 \geqslant 0, \\ (p-1)^2 = p+5 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} p-1 \geqslant 0, \\ p^2 - 3p - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p-1 \geqslant 0, \\ p = -1,\ p = 4 \end{cases} \iff p = 4.$$

Ответ. $p = 4$.

Пример 48 (факультет ВМиК (апрель), 2004, №6 (6))**.** При всех значениях параметра a решите уравнение

$$|x-3| - (1-2a)x^2 + (3-4a)x + 6a - 4 =$$
$$= \sin(|x-3| + 6a - 4) - \sin((1-2a)x^2 - (3-4a)x).$$

Решение. Уравнение эквивалентно следующему:

$$|x-3| + 6a - 4 - \sin(|x-3| + 6a - 4) =$$
$$= (1-2a)x^2 - (3-4a)x - \sin((1-2a)x^2 - (3-4a)x) \iff$$
$$\iff f(u) = f(v),$$

где $u = |x-3| + 6a - 4$, $v = (1-2a)x^2 - (3-4a)x$, $f(t) = t - \sin t$. Используя строгую монотонность функции $f(t)$ (см. введение в данный параграф), получаем

$$f(u) = f(v) \iff u = v \iff$$
$$\iff (2a-1)x^2 - (4a-3)x + |x-3| + 6a - 4 = 0.$$

Остаётся разобрать три случая:

I. Пусть $a = 1/2$. Тогда $|x-3| + x - 1 = 0$.

II. Пусть $a \neq 1/2$, $x \leqslant 3$. Тогда

$$x^2 - 2x + \frac{6a-1}{2a-1} = 0.$$

III. Пусть $a \neq 1/2$, $x > 3$. Тогда

$$x^2 - \frac{4(a-1)}{2a-1}x + \frac{6a-7}{2a-1} = 0.$$

Решая данные уравнения, получаем ответ.
Ответ. При $a \in (-\infty; 0) \cup [1/2; +\infty)$ решений нет;
при $a \in (0; (3-\sqrt{3})/4)$ два решения: $x = 1 \pm 2\sqrt{a/(1-2a)}$;
при $a = (3-\sqrt{3})/4$ три решения: $x = 2+\sqrt{3}$ и $x = 1 \pm \sqrt[4]{12}$;
при $a \in ((3-\sqrt{3})/4; 1/3)$ четыре решения:
$x = (2(a-1) \pm \sqrt{-8a^2+12a-3})/(2a-1)$, $x = 1 \pm 2\sqrt{a/(1-2a)}$;
при $a = 1/3$ три решения: $x = -1$, $x = 3$, $x = 5$;
при $a \in (1/3; 1/2)$ два решения: $x = 1 - 2\sqrt{a/(1-2a)}$,
$x = (2(a-1) - \sqrt{-8a^2+12a-3})/(2a-1)$.

Задача 257 (ЕГЭ, 2003, № С2). При каких значениях p уравнение

$$-7\cos 2x + \frac{2q}{\cos x} = -37$$

имеет решения?

Задача 258 (факультет почвоведения (июль), 1990, № 6). Решите неравенство

$$\log_2(x+2) > 1 - x.$$

Задача 259 (ЕГЭ, 2002, № С3). При каких значениях a сумма

$$\log_a(\cos^2 x + 1) + \log_a(\cos^2 x + 5)$$

равна 1 хотя бы при одном значении x?

Задача 260 (высшая школа бизнеса (апрель), 2003, № 6). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$25x^5 + 25(a-1)x^3 - 4(a-7)x = 0$$

имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию.

Задача 261 (геологический факультет (июль), 2002, № 7). При каких значениях параметра a периметр плоской фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} y \leqslant \sqrt{1-x^2}, \\ a|y| \leqslant |x| \end{cases}$$

больше чем $4 + 2\sqrt{2} + \pi/2$?

Задача 262 (ЕГЭ (демо), 2005, № C5). Известно, что уравнение

$$(2p+3)x^2+(p+3)x+1=0$$

имеет хотя бы один корень. Найдите все значения параметра p, при которых число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения

$$\frac{2x+1}{21-p}=\frac{1}{\sqrt{x-3}+3}.$$

Задача 263 (филологический факультет (апрель), 1987, № 5). Решите неравенство

$$\frac{9}{3x+2}>\frac{1+\log_3(x+6)}{x}.$$

Задача 264 (химический факультет, 1989, № 5). Решите уравнение

$$(2x+1)\cdot\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+3x\cdot\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0.$$

Задача 265 (факультет ВМиК (апрель), 2005, № 6 (6)). При всех значениях параметра a решите уравнение

$$9(1-a)x^2-(3-6a)x+2-3a-|3x+1| = \\ = \cos\left(9(1-a)x^2+2-3a\right)-\cos\left(|3x+1|+(3-6a)x\right).$$

Задача 266 (химический факультет, 1998, № 6). Решите уравнение

$$\log_2(4x+1)\log_5(4x+4)+\log_3(4x+2)\log_4(4x+3) = \\ = 2\log_3(4x+2)\log_5(4x+4).$$

Задача 267 (факультет ВМиК (июль), 2001, № 6). Функция $f(x)$ определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\frac{2f(x^2-2x-112)+\left|f(x^2-2x-112)-3f(-2x\sqrt{32-2x})\right|}{\left(3f(-2x\sqrt{32-2x}-112)-2f(-2x\sqrt{32-2x})\right)^7}>0.$$

Задача 268 (механико-математический факультет (май), 2003, № 6). Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\log_x\frac{x-a}{1-ax}+\log_{x-1}\frac{x-a-1}{a+1-ax}\geqslant 0$$

имеет хотя бы 3 целочисленных решения.

Ответы. **257.** $q \in [-15; 0) \cup (0; 15]$. **258.** $x \in (0; +\infty)$. **259.** $a \in [5; 12]$. **260.** $a = -2$. **261.** $a \in (-\infty; 1)$. **262.** $p = -3/2$, $p = -1$. **263.** $x \in (-2/3; 0)$. **Указание.** Выразите логарифм и решите неравенство. **264.** $-1/5$. **265.** При $a \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$ решений нет; при $a = 0$ одно решение $x = 1/3$; при $a \in (0; (3-\sqrt{3})/2)$ два решения: $x = (1/3) \cdot (1 \pm \sqrt{2a/(1-a)})$; при $a = (3-\sqrt{3})/2$ три решения: $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1 \pm \sqrt[4]{12}}{3}$; при $a \in ((3-\sqrt{3})/2; 2/3)$ четыре решения: $x = \frac{-a \pm \sqrt{-2a^2+6a-3}}{3(1-a)}$, $x = (1/3) \cdot (1 \pm \sqrt{2a/(1-a)})$; при $a = 2/3$ три решения: $x = -1/3$, $x = \pm 1$; при $a \in (2/3; 1)$ два решения: $x = (1/3) \cdot (1 + \sqrt{2a/(1-a)})$, $x = (-a + \sqrt{-2a^2+6a-3})/(3(1-a))$. **266.** $1/4$. **267.** $x \in (-13-\sqrt{57}; 8)$. **268.** $a \in [-1; 1/5)$. **Указание.** Представьте неравенство в виде $f(x) + f(x-1) \geqslant 0$ и докажите с использованием монотонности, что для любого a из области допустимых значений на всей области определения x выполнено либо неравенство $f(x) \geqslant 0$, либо $f(x) \leqslant 0$.

§1.19. Задачи с итерациями

Рассмотрим уравнение

$$\underbrace{f(f(\ldots f(}_{n\ \text{раз}}x)\ldots)) = x. \qquad (1.15)$$

Очевидно, что все корни уравнения $f(x) = x$ являются корнями уравнения (1.15). Действительно, если для x_0 справедливо равенство $f(x_0) = x_0$, то

$$\underbrace{f(f(\ldots f(}_{n\ \text{раз}}x_0)\ldots)) = \underbrace{f(f(\ldots f(}_{n-1\ \text{раз}}f(x_0))\ldots)) =$$
$$= \underbrace{f(f(\ldots f(}_{n-1\ \text{раз}}x_0)\ldots)) = \ldots = f(x_0) = x_0.$$

Уравнения (1.15) и $f(x) = x$, вообще говоря, не эквивалентны. Однако если функция $f(x)$ монотонна (возрастает или убывает), то уравнения равносильны. Для доказательства данного утверждения достаточно доказать, что если x_0 не является корнем уравнения $f(x) = x$, то x_0 не является корнем уравнения (1.15). Пусть для определённости функция $f(x)$ монотонно возрастает. Тогда из определения возрастающей функции легко вытекает, что функции $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, $f(f(f(f(x))))$ и т. д. тоже возрастающие. Поскольку x_0 не является корнем уравнения

$f(x) = x$, мы имеем либо $f(x_0) > x_0$, либо $f(x_0) < x_0$. Рассмотрим случай $f(x_0) > x_0$:

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{n\text{ раз}}(x_0)\ldots)) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n-1\text{ раз}}(f(x_0))\ldots)) > \underbrace{f(f(\ldots f}_{n-1\text{ раз}}(x_0)\ldots)) =$$
$$= \underbrace{f(f(\ldots f}_{n-2\text{ раз}}(f(x_0))\ldots)) > \ldots > f(x_0) > x_0.$$

Случай $f(x_0) < x_0$ разбирается аналогично. Таким образом, показано, что для монотонной функции $f(x)$ уравнения $f(x) = x$ и (1.15) эквивалентны.

Пример 49. Укажите все значения a, для которых уравнение

$$\sqrt{3a + \sqrt{3a + 2x - x^2}} = 2x - x^2$$

имеет решение.

Решение. Положим $f(t) = \sqrt{3a + t}$. Тогда исходное уравнение запишем в виде

$$f(f(2x - x^2)) = 2x - x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad f(f(t)) = t, \quad t = 2x - x^2.$$

Так как график функции $g(x) = 2x - x^2$ — парабола с вершиной в точке $x = 1$ и максимумом, равным 1, для того чтобы для фиксированного t существовало хотя бы одно решение x уравнения $t = 2x - x^2$, необходимо и достаточно выполнения условия $t \leqslant 1$. Поскольку функция $f(t)$ монотонна, уравнение $f(f(t)) = t$ равносильно уравнению $f(t) = t$. Решаем последнее уравнение:

$$\begin{cases} f(t) = t, \\ t \leqslant 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3a + t} = t, \\ t \leqslant 1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3a + t = t^2, \\ t \geqslant 0, \\ t \leqslant 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (t - 1/2)^2 = 3a + 1/4, \\ t \in [0; 1] \end{cases} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t_\pm = 1/2 \pm \sqrt{3a + 1/4}, \\ t_\pm \in [0; 1]. \end{cases}$$

Но $t_+ = \frac{1}{2} + \sqrt{3a + \frac{1}{4}}$ принадлежит отрезку $[0; 1]$ при $a \in [-1/12; 0]$ и $t_- = \frac{1}{2} - \sqrt{3a + \frac{1}{4}}$ тоже принадлежит отрезку $[0; 1]$ при $a \in [-1/12; 0]$.

Следовательно, при $a \in [-1/12; 0]$ существует по крайней мере одно такое значение $t \leqslant 1$, что $f(f(t)) = t$. А для каждого такого t существует хотя бы одно такое значение x, что $t = 2x - x^2$.

Ответ. $a \in [-1/12; 0]$.

Задача 269 (факультет почвоведения, 1984, № 5)**.** Укажите все значения a, для которых уравнение

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$$

имеет решение.

Задача 270 (факультет почвоведения, 1984, № 5)**.** Укажите все значения a, для которых уравнение

$$\sqrt{5a + \sqrt{5a - x - \frac{x^2}{4}}} + x + \frac{x^2}{4} = 0$$

имеет решение.

Задача 271 (механико-математический факультет (устный экзамен), 1992)**.** Решите в целых числах уравнение

$$\underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots \sqrt{x}}}}}_{1992\,\text{раза}} = y.$$

Задача 272 (факультет почвоведения, 1984, № 5)**.** Укажите все значения a, для которых уравнение

$$\sqrt{1 + a + \sqrt{a + 2\cos^2 x}} = \cos 2x$$

имеет решение.

Ответы. **269.** $a \in [-1/4; 0]$. **270.** $a \in [-1/20; 0]$. **271.** $x = y = 0$. **270.** $a \in [-5/4; -1]$.

§1.20. Задачи с требованием выполнения (или невыполнения) неравенства для всех значений параметра

Выполнение условия задачи для любого значения параметра означает его выполнение для некоторого «удобного» значения, т. е. основная наша задача состоит в нахождении «удобного» значения параметра, который в дальнейшем позволит указать решения исходной задачи.

Пусть в задаче требуется определить значения параметра (или нескольких параметров), при которых уравнение (или неравенство) выполняется при всех допустимых значениях переменной x. Естественно попытаться подставить в него удобные значения переменной x, получив при этом *необходимые* условия на параметры.

Пример 50 (психологический факультет, 1978, № 4)**.** Найдите такие a и b, при которых равенство

$$\sin(ax + b) = a\sin x + b$$

выполняется для всех x.

Решение. Подставим значения $x = 0$. При этом исходное равенство примет вид $\sin b = b$. Это уравнение имеет единственное решение $b = 0$. (*Доказательство.* Пусть $f(b) = b - \sin b$; $f'(b) = 1 - \cos b \geqslant 0$. Поэтому функция $f(b)$ возрастает. Если $b = 0$, то, очевидно, $f(b) = 0 - \sin 0 = 0$. Поэтому $b = 0$ — единственное решение уравнения $b = \sin b$.)

Итак, необходимое условие — $b = 0$. Исследуемое равенство принимает вид $\sin(ax) = a\sin x$. Подставляя $x = \pi/2$, получаем $\sin(a\pi/2) = a$, поэтому $|a| \leqslant 1$. При $a = \pm 1$, $b = 0$ равенство, очевидно, верно. Также оно верно и при $a = 0$, $b = 0$.

Пусть $0 < |a| < 1$. Подстановка $x = \pi/(2a)$ приводит к равенству

$$\sin\frac{\pi}{2} = a\sin\frac{\pi}{2a} \Longleftrightarrow 1 = a\sin\frac{\pi}{2a},$$

которое невозможно при $0 < |a| < 1$.

Ответ. $a = \pm 1$, $b = 0$; $a = 0$, $b = 0$.

Пример 51 (факультет почвоведения (июль), 2000, № 7)**.** Найдите все значения a, при которых при любых значениях параметра b уравнение $|x - 2| + b|2x + 1| = a$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Обозначим

$$f(x) = |x-2| + 2b|x+1/2|.$$

Тогда исходная задача может быть записана в следующем виде: *найдите все значения a, при которых при любых значениях параметра b уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы одно решение.*

В данном случае при решении «удобными» будут $b = \pm 1/2$. Действительно[1], для $b = 1/2$ мы имеем

$$f(x) = |x-2| + |x+1/2| \geqslant |(2-x) - (x+1/2)| = 5/2.$$

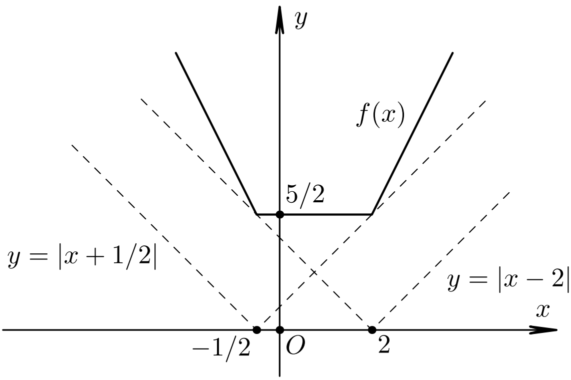

Рис. 1.81. График $f(x) = |x-2| + |x+1/2|$.

А для $b = -1/2$ получаем

$$f(x) = |x-2| - |x+1/2| \leqslant |(x-2) - (x+1/2)| = 5/2.$$

Следовательно, уравнение $f(x) = a$ имеет решение для любого значения только при $a = 5/2$.

Ответ. $a = 5/2$.

Задача 273 (РХТУ)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a^2 - 2a\cos x - \sin^2 x + 2a > 2$ выполняется для всех x.

Задача 274 (филологический факультет, 2005, № 7 (7))**.** При каких целых a неравенство $2\log_{1/2} a - 3 + 2x\log_{1/2} a - x^2 < 0$ верно для любого значения x?

[1]Здесь мы использовали неравенства $|x| - |y| \leqslant |x-y| \leqslant |x| + |y|$, $\quad x, y \in \mathbb{R}$, см. §1.2.

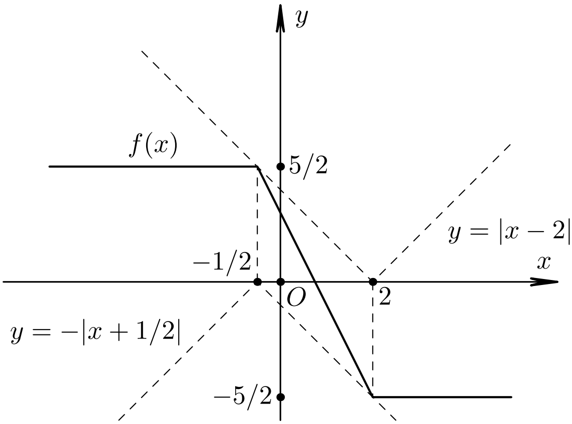

Рис. 1.82. График $f(x) = |x-2| - |x+1/2|$.

Задача 275 (экономический факультет (отделение политической экономии), 1978, № 5)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a(4-\sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$ выполняется для всех x.

Задача 276 (ИСАА, 1993, № 6)**.** Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2 + 2|x-a| \geqslant a^2$ справедливо для всех x.

Задача 277 (факультет почвоведения, 1998, № 6)**.** Определите, 1) при каких значениях a существует такое число b, что уравнение

$$5\cos x + \sin x + \cos(x-b) = a$$

имеет решения; 2) при каких значениях a это уравнение имеет решения при любом значении b.

Задача 278 (геологический факультет (июль), 1996, № 8)**.** Найдите все значения параметра b, при которых для любого действительного a уравнение

$$\cos(a + ab + ax) + 4\cos a^2 x = 5b^2$$

имеет хотя бы одно решение.

Задача 279 (факультет государственного управления (июль), 2005, № 6 (7))**.** Найдите все значения a, для которых при любом положительном b уравнение

$$a\log_{1/x-2} 4 = \log_2(1/x-2) - b$$

имеет хотя бы одно решение, меньшее $1/3$.

Задача 280 (ИСАА, 1996, № 6)**.** При каких значениях a неравенство

$$\log_{(2a-15)/5}\left(\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x+a-5}{5}\right)>0$$

выполняется для всех x.

Задача 281 (факультет почвоведения (июль), 2000, № 7)**.** Найдите все значения параметра a, при которых при любых значениях параметра b уравнение $b\cdot|3x-1|+|x+1|=a$ имеет хотя бы одно решение.

Задача 282 (психологический факультет, 1978, № 4)**.** Найдите множество всех пар чисел $(a;b)$, для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$a(\cos x-1)+b^2=\cos(ax+b^2)-1.$$

Задача 283 (экономический факультет (отделение политической экономии), 1977, № 5)**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $25y^2+1/100\geqslant x-axy+y-25x^2$ выполняется для любых таких пар $(x;y)$, что $|x|=|y|$.

Задача 284 (факультет фундаментальной медицины (май), 2003, № 6)**.** Найдите все действительные значения параметра b, при которых для любой пары чисел $(s;t)$ функция

$$f(x)=tx^4-s(b^2-4)x^3+bx-s-2$$

удовлетворяет хотя бы одному из условий $f(1)>-2$, $f(-1)<2$.

Задача 285 (факультет фундаментальной медицины (май), 2003, № 6)**.** Найдите все действительные значения параметра a, при которых не найдётся ни одной такой пары чисел $(u;v)$, чтобы функция

$$f(x)=vx^4+a(au-1)x^3-2u-2$$

удовлетворяла одновременно условиям $f(-1)\geqslant-2u$, $f(1)\leqslant-2$.

Задача 286 (факультет ВМиК (июль), 1990, № 6)**.** Найдите все значения параметра a, при которых для любых значений параметра b неравенство

$$\left|\log_6\left(\frac{x}{36}\right)+\left(\frac{10a+3b+31}{5}\right)z^2-9b^2-9b-1\right|\leqslant$$

$$\leqslant\log_6\left(\frac{36}{x}\right)+\left(\frac{10a+3b+41}{5}\right)x^2-(6b+2)x+9b^2+15b+3$$

имеет хотя бы одно решение.

Задача 287 (механико-математический факультет (июль), 1986, № 5)**.** Найдите все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by - 4z = 4 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение $(x; y; z)$.

Ответы. **273.** $a \in (-\infty; -2-\sqrt{6}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$. **274.** $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. **275.** $a > 3/82$. **276.** $|a| \leqslant 1$. **277.** 1) $a \in [-\sqrt{26}-1; \sqrt{26}+1]$, 2) $a \in [-\sqrt{26}+1; \sqrt{26}-1]$. **278.** $b = -1$. **279.** $a \geqslant 0$. **280.** $a \in (15/2; 8) \cup \cup (12; +\infty)$. **281.** $a = 4/3$. **282.** $(a; b) = (0; 0)$, $(a; b) = (1; 0)$. **283.** $a = 50$. **284.** $b = 2$. **285.** $a = -1$. **286.** $[-7/2; +\infty)$. **287.** $a \in [-1/4; 1/3]$. **Указание.** Найдите решение при $z = 0$ и проведите дальнейший анализ.

§1.21. Геометрические задачи с элементами алгебры

Пример 52 (химический факультет (июль), 1999, № 5)**.** В сферу радиуса $\sqrt{3}$ вписан параллелепипед, объём которого равен 8. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

Решение. Так как грани данного параллелепипеда — вписанные параллелограммы, они могут быть только прямоугольниками. Это означает, что параллелепипед на самом деле прямоугольный, центр описанной сферы совпадает с центром параллелепипеда, а её диаметр равен главной диагонали параллелепипеда.

Таким образом,

$$12 = a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3(abc)^{2/3} = 3 \cdot 8^{2/3} = 12,$$

где использовано неравенство[1] между средним арифметическим и средним геометрическим чисел a^2, b^2, c^2. Но поскольку знак равенства может достигаться лишь в том случае, когда $a = b = c$, мы получаем $a = b = c = 4$. Таким образом, искомая площадь $S = 6a^2 = 24$.

Ответ. 24.

[1] Доказательство неравенства $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$, $x, y, z > 0$, см. §1.11.

Пример 53 (физический факультет (март), 1997, № 8)**.** В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ — прямоугольник, $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Найдите SD.

Решение. Обозначим апофемы через SA_1, SB_1, SC_1, SD_1. Обозначим $b = AA_1 = C_1D$, $d = A_1B = CC_1$, $a = BB_1 = D_1A$, $c = B_1C = DD_1$. Тогда

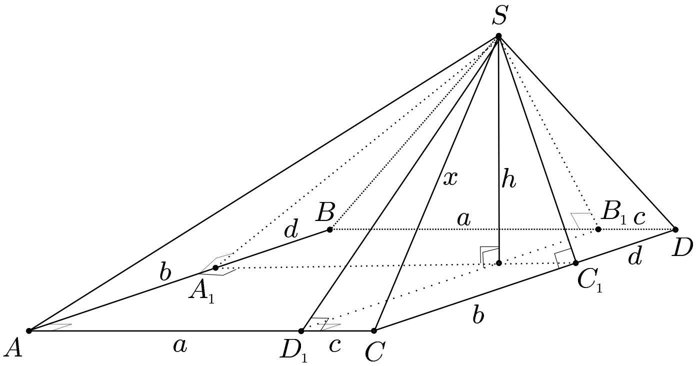

Рис. 1.83.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + h^2 = 2^2, \\ d^2 + a^2 + h^2 = 3^2, \\ c^2 + d^2 + h^2 = 4^2, \\ c^2 + b^2 + h^2 = x^2. \end{cases}$$

Складывая первое уравнение с третьим, а второе с четвертым, получаем

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2h^2 = 2^2 + 4^2, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2h^2 = 3^2 + x^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad 2^2 + 4^2 = 3^2 + x^2 \quad \iff \quad x^2 = 11.$$

Ответ. $\sqrt{11}$.

Задача 288 (химический факультет (май), 1996, № 4)**.** В треугольнике PQR сторона PQ не больше 9, сторона PR не больше 12. Площадь треугольника не меньше 54. Найдите длину его медианы, проведённой из вершины P.

Задача 289 (физический факультет (март), 1997, № 8)**.** В треугольной пирамиде $SKLM$ угол KLM прямой, $SK = 5$, $SL = 6$, $SM = 7$. Найдите расстояние от вершины S до такой точки N, что $KLMN$ — прямоугольник.

Задача 290 (географический факультет (июль), 1996, № 4 (5))**.** Углы треугольника ABC удовлетворяют равенству

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Найдите площадь треугольника, если радиусы вписанной и описанной окружностей равны $\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$ соответственно.

Задача 291 (химический факультет (июль), 1997, № 5)**.** Площадь треугольника ABC равна 10 см^2. Какое наименьшее значение может принимать длина окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что середины высот этого треугольника лежат на одной прямой?

Задача 292 (химический факультет (июль), 1999, № 5)**.** В сферу радиуса 1 вписан параллелепипед, объём которого равен $8\sqrt{3}/9$. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

Задача 293 (экономический факультет (отделение экономики) (июль), 2001, № 6 (7))**.** Центры двенадцати шаров равных радиусов совпадают с серединами рёбер правильной шестиугольной пирамиды. Найдите величину двугранного угла при ребре основания пирамиды, если известно, что шар, вписанный в пирамиду, касается всех двенадцати данных шаров.

Ответы. **288.** $15/2$. **289.** $\sqrt{38}$. **290.** $6\sqrt{6}+3$. **291.** $2\pi\sqrt{10}$ см. **292.** 8. **293.** $\arccos(6-\sqrt{33})$.

§1.22. Задачи алгебры с использованием геометрии

Пример 54 (заочная олимпиада в МГУ «Покори Воробьёвы горы» 2005, № 8 (10))**.** Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-9)^2+4} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(y-3)^2+9}.$$

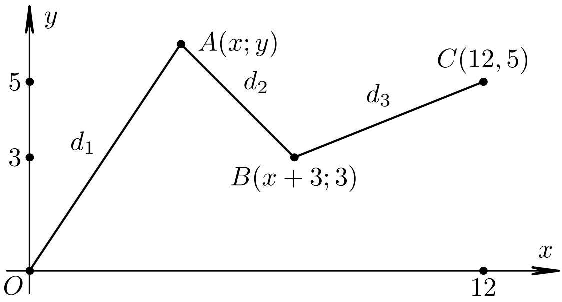

Рис. 1.84

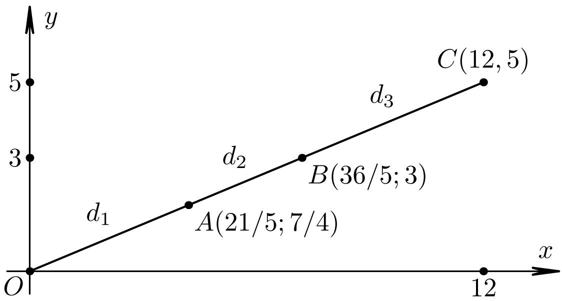

Рис. 1.85

Решение. Данный пример можно решать при помощи производной, но наиболее простое решение следующее. Достаточно взглянуть на картинки (см. рис. 1.84, 1.85):

Пусть $d_1 = \sqrt{x^2+y^2}$, $d_2 = \sqrt{(y-3)^2+9}$, $d_3 = \sqrt{(x-9)^2+4}$, точка $O(0;0)$ — начало координат. Исходное выражение есть сумма расстояний между тремя точками $A(x;y)$, $B(x+3;3)$, $C(12;5)$. Действительно,

$$|OA| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = d_1,$$
$$|AB| = \sqrt{(x+3-x)^2 + (3-y)^2} = \sqrt{(y-3)^2 + 9} = d_2,$$
$$|BC| = \sqrt{(12-(x+3))^2 + (5-3)^2} = \sqrt{(x-9)^2 + 4} = d_3.$$

Следовательно, наименьшее значение суммы расстояний d_1, d_2, d_3 будет достигаться, если точки A и B окажутся на одном отрезке, соединяющем точки O и C (см. рис. 1.85).

Проверим, что такое расположение точек возможно. Уравнение прямой, проходящей через точки O и C имеет вид $x/12 = y/5$, но, поскольку данная прямая должна проходить через точку $B(x+3;3)$, мы приходим к системе

$$\begin{cases} x/12 = y/5, \\ (x+3)/12 = 3/5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 21/5, \\ y = 7/4. \end{cases}$$

Таким образом, нами доказано, что расположение, когда все точки находятся на одной прямой, возможно. Следовательно, наименьшее значение выражения $\sqrt{12^2+5^2} = 13$.

Ответ. 13.

Пример 55 (геологический факультет (май), 2003, № 7)**.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{1+x} = 32y\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2+y^2+2-2x-2y} + \sqrt{x^2+y^2-6x+9} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Решение. Исследуем второе уравнение. Запишем его в виде

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{5}.$$

Данное уравнение означает, что сумма расстояний от точки $(x;y)$ до точек $(1;1)$ и $(3;0)$ равна $\sqrt{5}$. Но поскольку расстояние между точками $(1;1)$ и $(3;0)$ тоже равно $\sqrt{5}$, это означает, что точка $(x;y)$ должна лежать на отрезке, соединяющем вершины точек $(1;1)$ и $(3;0)$ см. рисунки. Или, другими словами, должно выполняться уравнение $y = (3-x)/2$

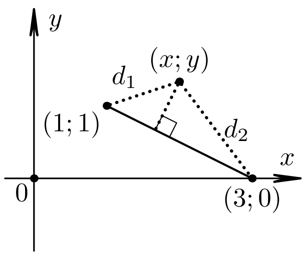

Рис. 1.86. $d_1 + d_2 > \sqrt{5}$

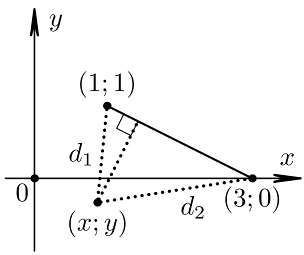

Рис. 1.87. $d_1 + d_2 > \sqrt{5}$

для $x \in [1;3]$. Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 2^{1+x} = 32y\sqrt{2}, \\ 2y = 3 - x, \quad x \in [1;3]. \end{cases}$$

Подставив $2y$ в первое уравнение, получаем

$$2^{1+x} = 16(3-x)\sqrt{2} \iff 2^{x-7/2} = 3 - x \iff 2^{x-7/2} + x = 3.$$

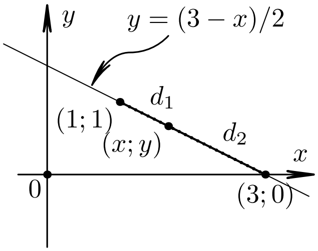

Рис. 1.88. $d_1 + d_2 = \sqrt{5}$

Поскольку функция $2^{x-7/2} + x$ монотонно возрастающая (как сумма двух монотонно возрастающих), каждое значение она принимает ровно один раз, см. §1.18. Поэтому решение $x = 5/2$ единственно.

Ответ. $x = 5/2$, $y = 1/4$.

Пример 56 (психологический факультет (июль), 1997, № 6 (6))**.** Найдите все значения параметров a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = b^2 + 2x - 4y, \\ x^2 + (12 - 2a)x + y^2 = 2ay + 12a - 2a^2 - 27 \end{cases}$$

имеет два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, удовлетворяющие условию

$$\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}.$$

Решение. Последнее условие равносильно тому, что два решения лежат на окружности с центром в точке $(0; 0)$, так как

$$\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Выделив полные квадраты, перепишем исходную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = b^2, \\ (x + (6 - a))^2 + (y - a)^2 = 9. \end{cases}$$

Эти уравнения задают окружности с центрами в точках $O_1(1; 2)$ и $O_2(a - 6; a)$. Таким образом, координаты точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ должны удовлетворять уравнениям сразу трёх окружностей.

Рассмотрим сначала окружности с центрами в точках $O_1(1; -2)$ и $O(0; 0)$. Так как M_1M_2 — серединный перпендикуляр к OO_1, точки

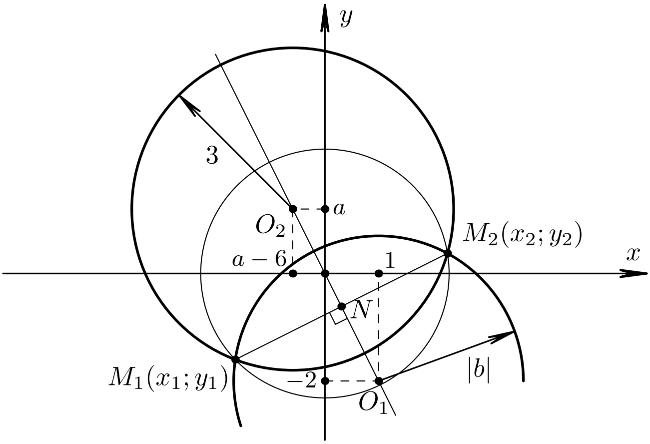

Рис. 1.89

O, N, O_1 лежат на одной прямой (N — точка пересечения M_1M_2 с OO_1), перпендикулярной к M_1M_2. Аналогично, рассмотрев окружности с центрами в точках $O_2(a-6;a)$ и $O(0;0)$, выводим, что точки O, N, O_2 лежат на одной прямой, перпендикулярной к M_1M_2.

Таким образом, точки O, O_1, O_2 лежат на одной прямой, проходящей через точку N. Напишем уравнение прямой[1], проходящей через точки O_1 и O_2:

$$\frac{x-1}{a-6-1} = \frac{y+2}{a+2}.$$

Подставляя в уравнение прямой координаты точки $O(0;0)$, получаем

$$(-1)(a+2) = 2(a-7) \quad\Longleftrightarrow\quad 3a = 12 \quad\Longleftrightarrow\quad a = 4.$$

Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в двух точках тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$O_1O_2 - R_2 < R_1 < O_1O_2 + R_2, \quad\Longleftrightarrow\quad O_1O_2 - |b| < 3 < O_1O_2 + |b|.$$

Поскольку $O_1O_2 = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{45}$, мы получаем

$$\sqrt{45} - |b| < 3 < \sqrt{45} + |b| \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{45} - 3 < |b| < \sqrt{45} + 3.$$

[1]Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), записывается в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

В случае $x_2 = x_1$ уравнение прямой имеет вид $x = x_1$, а в случае $y_2 = y_1$ — вид $y = y_1$.

Ответ. $a = 4$, $\sqrt{45} - 3 < |b| < \sqrt{45} + 3$.

Пример 57 (биологический факультет и факультет фундаментальной медицины, 1992, № 5 (5))**.** Найдите наименьшее значение величины

$$\frac{1}{c} \cdot \left(\frac{3a}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-t^2}} \right),$$

где a, b, c, t, u — положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} at + bu \leqslant c, \\ a^2 + 2bcu \geqslant b^2 + c^2, \\ b^2 \cdot \dfrac{t^2 - u^2}{t^2 - 1} + c^2 \leqslant 2bcu. \end{cases}$$

Решение. Так как $0 < u, t < 1$, удобно сделать замену

$$u = \cos\alpha, \quad t = \cos\beta, \quad \alpha, \beta \in (0; \pi/2).$$

Тогда задача перепишется в следующем виде.

Найдите наименьшее значение величины

$$W = \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{3a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\sin\beta} \right),$$

где a, b, c — положительные числа, а $\alpha, \beta \in (0; \pi/2)$ удовлетворяют условиям

$$a\cos\beta + b\cos\alpha \leqslant c, \tag{1.16}$$

$$a^2 \geqslant b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \tag{1.17}$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \leqslant b^2 \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}. \tag{1.18}$$

Докажем, что существует треугольник ABC со сторонами a, b, c и углами α, β. Зададим треугольник ABC по сторонам b, c и углу между ними α. Тогда оставшиеся сторона $BC = a_0$ и угол $\angle ABC = \beta_0$ заданы однозначно.

Покажем, что при заданных условиях (1.16)–(1.18) справедливо равенство $a = a_0$, $\beta = \beta_0$. Покажем сначала, что угол β_0 острый. Пусть угол β_0 тупой или прямоугольный, тогда проекция стороны AC на сторону AB равна $b\cos\alpha \geqslant c$ (см. рис. 1.91), что противоречит условию (1.16). Следовательно, угол β_0 острый, т. е. $\beta_0 \in (0; \pi/2)$. Из теоремы косинусов для треугольника ABC находим

$$a_0^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \tag{1.19}$$

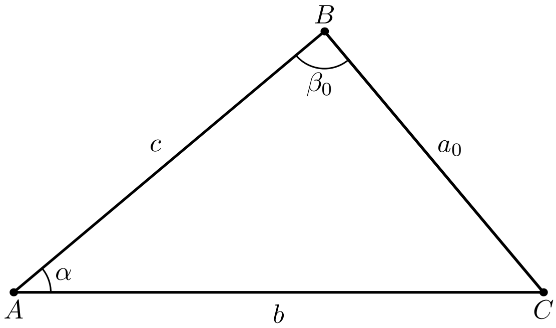

Рис. 1.90. Треугольник ABC

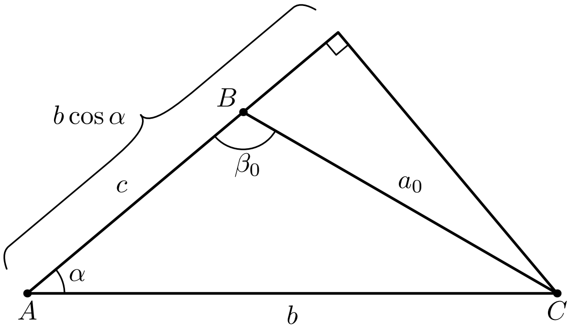

Рис. 1.91. Случай тупого угла β_0

Из условия (1.17) делаем вывод: $a \geqslant a_0$. Из теоремы синусов для треугольника ABC получаем

$$\frac{a_0}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta_0} = 2R.$$

Отсюда получаем

$$a_0^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \leqslant b^2 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta_0} \cdot \frac{\sin^2\beta_0}{\sin^2\beta} = a_0^2 \cdot \frac{\sin^2\beta_0}{\sin^2\beta} \iff$$
$$\iff \sin^2\beta \leqslant \sin^2\beta_0 \iff \beta \leqslant \beta_0.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что углы β, β_0 острые. Теперь из формулы (1.16) и соотношения $a_0\cos\beta_0 + b\cos\alpha = c$ (сумма проекций сторон a_0, b равна стороне c, см. рис. 1.92) получаем

$$c \leqslant a\cos\beta + b\cos\alpha \leqslant a_0\cos\beta + b\cos\alpha \leqslant a_0\cos\beta_0 + b\cos\alpha = c.$$

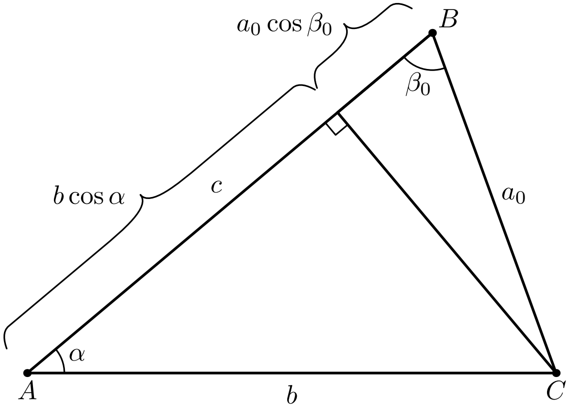

Рис. 1.92. Треугольник ABC

Поскольку $c = c$, в каждом переходе должен быть знак равенства, т. е. $\beta = \beta_0$, $a = a_0$. Таким образом, мы доказали, что существует треугольник ABC со сторонами a, b, c и углами α, β. Используя теорему синусов в треугольнике ABC, получаем

$$W = \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{3a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\sin\beta}\right) = \frac{1}{c} \cdot (3 \cdot 2R + 2R) = \frac{8R}{c} = 4 \cdot \frac{1}{\sin\gamma} \geqslant 4.$$

Отметим, что знак равенства $W = 4$ достигается лишь в случае прямого угла γ.

Ответ. 4.

Задача 294 (заочная олимпиада в МГУ «Покори Воробьёвы горы» 2005, № 8 (10))**.** Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-6)^2+36} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(y-6)^2+9}.$$

Задача 295 (биологический факультет (июль), 2005, № 6 (7))**.** Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-2x-22y+122} = 2\sqrt{37} - \sqrt{x^2+y^2+2x+2y+2}, \\ \log_{x+1} 4 + \log_y 4 = 0. \end{cases}$$

Задача 296 (факультет ВМиК (июль), 1996, № 5)**.** Решите систему

$$\begin{cases} x^2+y^2-14x-10y+58 = 0, \\ \sqrt{x^2+y^2-16x-12y+100} + \sqrt{x^2+y^2+4x-20y+104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

Задача 297 (геологический факультет (май), 2003, № 7)**.** Решите систему

$$\begin{cases} 2^{2-x} = 4y\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2+y^2+1-2x} + \sqrt{x^2+y^2-6x-2y+10} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Задача 298 (географический факультет (май), 1999, № 5)**.** При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y^2-(2a+1)y+a^2+a-2=0, \\ \sqrt{(x-a)^2+y^2} + \sqrt{(x-a)^2+(y-3)^2} = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Задача 299 (психологический факультет (июль), 1997, № 6 (6))**.** Найдите все действительные значения параметров a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+40-a^2 = 4y-y^2-12x, \\ x^2+y^2+(-2b-8)x = 2by-2b^2-8b \end{cases}$$

имеет два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, удовлетворяющие условию

$$\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2} = \frac{x_1+x_2}{y_2-y_1}.$$

Задача 300 (биологический факультет и факультет фундаментальной медицины, 1992, № 5 (5))**.** Найдите наименьшее значение величины

$$\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{4p}{u}+\frac{q}{\sqrt{1-v^2}}\right),$$

где p, q, r, u, v — положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} pv+q\sqrt{1-u^2} \leqslant r, \\ p^2+2qr\sqrt{1-u^2} \geqslant q^2+r^2, \\ 2qr\sqrt{1-u^2}+q^2\cdot\dfrac{1-v^2-u^2}{v^2-1} \geqslant r^2. \end{cases}$$

Ответы. **294.** 15. **295.** $x=-1/2$, $y=2$. **296.** $x=(217-5\sqrt{415})/29$, $y=(180+2\sqrt{415})/29$. **297.** $x=3/2$, $y=1/4$. **298.** $a\in[-2;1)\cup(1;4]$. **299.** $b=-1$, $\sqrt{90}-4<|a|<\sqrt{90}+4$. **300.** 5.

Часть 2

Варианты вступительных экзаменов

§2.1. Варианты 2003 года

ВАРИАНТ 2003 (март), механико-математический факультет, 1.

Задача 1. Найдите первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых шести членов отличается от суммы следующих шести членов менее чем на 450, а сумма первых пяти членов превышает более чем на 5 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

Задача 2. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{4x^7-10x^3}{4x-x^3-3}} \leqslant x^3.$$

Задача 3. На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята такая точка D, что $AD = 10$ и $\angle BDC = \angle BAL = 60°$. Найдите площадь треугольника ABC. Какова наименьшая площадь треугольника BDC при данных условиях?

Задача 4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} |y+\log_2 x| + |y+1-2^{x-1}| = |2y-2^{x-1}+1+\log_2 x|, \\ |x|+|y+1|+|y-1| = x+2. \end{cases}$$

Задача 5. Точка O расположена в сечении $AA'C'C$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ размером $2\times 6\times 9$ так, что

$$\angle OAB + \angle OAD + \angle OAA' = 180°.$$

Сфера с центром в точке O касается плоскостей $A'B'C'$, $AA'B$ и не имеет общих точек с плоскостью $AA'D$. Найдите расстояние от точки O до этой плоскости.

Задача 6. Найдите все значения a, при каждом из которых расстояние между любыми двумя соседними корнями уравнения

$$\cos\alpha\cos 3x - \sin 3\alpha\cos x + 2\sin 2\alpha\cos 2x = 3\sin\alpha - \cos 3x$$

не превосходит $\frac{\pi}{3}$.

Ответы. **1.** 54. **2.** $x = 0$, $x \in [\sqrt[4]{5/2}; \sqrt[3]{2}]$. **3.** $25\sqrt{3}$, $75\sqrt{3}$. **4.** $S = 2$. **5.** 3. **6.** $\alpha = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ВАРИАНТ 2003 (март), механико-математический факультет, 2.

Задача 1. Найдите первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых семи членов отличается от суммы следующих семи членов менее чем на 400, а сумма первых шести членов превышает более чем на 3 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

Задача 2. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{5x^7 - 32x^3}{5x - x^3 - 4}} \leqslant x^3.$$

Задача 3. Площадь треугольника ABC равна 9. На продолжении его биссектрисы BL за точку B взята такая точка D, что

$$\angle ADC = \angle ABL = 45^\circ.$$

Какова наименьшая площадь треугольника ADC при данных условиях?

Задача 4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} |y + 3 - 2^{x-1}| + |y + \log_2 x| = |2^{x-1} - 3 + \log_2 x|, \\ |x - 1| + |x - 3| + |y| = 2 - y. \end{cases}$$

Задача 5. Точка O расположена в сечении $BB'D'D$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ размером $3 \times 4 \times 8$ так, что

$$\angle OBA + \angle OBC + \angle OBB' = 180^\circ.$$

Сфера с центром в точке O касается плоскостей $A'B'C'$, $BB'C$ и не имеет общих точек с плоскостью $BB'A$. Найдите расстояние от точки O до этой плоскости.

Задача 6. Найдите все значения a, при каждом из которых расстояние между любыми двумя соседними корнями уравнения

$$3\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\sin 3x = 2\sin 2\alpha\cos 2x - \sin 3x + \cos 3\alpha$$

не превосходит $\frac{\pi}{3}$.

Ответы. **1.** 44. **2.** $x = 0$, $x \in [\sqrt[3]{4}; \sqrt[4]{32/5}]$. **3.** $3\sqrt{2}$, $9(1+\sqrt{2})$. **4.** $S = 2$. **5.** 6. **6.** $\alpha = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ВАРИАНТ 2003 (май), механико-математический факультет, 1.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{1}{|7-\log_3 3x|} + \frac{1}{|4-\log_9 9x^2|} \leqslant \frac{1}{|\log_9 81x|}.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\sqrt{5\cos(2x-\pi)+8\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-5} + \sin\frac{x}{2}\cdot\sqrt{2\cos x} = 0.$$

Задача 3. В треугольнике ABC с углом $\angle B = 50^\circ$ и стороной $BC = 3$ на высоте BH взята такая точка D, что $\angle ADC = 130^\circ$ и $AD = \sqrt{3}$. Найдите угол между прямыми AD и BC , а также $\angle CBH$.

Задача 4. Числа p и q подобраны так, что уравнение

$$2^{1+x} + p + q2^{1-x} = 0$$

имеет ровно два различных корня, а их сумма равна 4. Найдите произведение всех различных корней уравнения

$$(x^2 - 5x - 300)(x^2 - px - q) = 0.$$

Задача 5. Пирамида $SABCD$ с боковыми ребрами $AS = BS = CS = 2$ вписана в сферу радиуса $\frac{5}{3}$. Линия пересечения плоскостей ASD и BSC касается сферы. Найдите объем пирамиды, если $AB = BC = \frac{8}{5}$.

Задача 6. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\log_x \frac{x-a}{1-ax} + \log_{x-1} \frac{x-a-1}{a+1-ax} \geqslant 0$$

имеет хотя бы 3 целочисленных решения.

Ответы. 1. $0 < x \leqslant 1, x \neq 3^{-4}$. **2.** $\alpha = \pi/2 + \pi n$, $\alpha = -\arccos(2/5) + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **3.** 90°, 20°. **4.** 4800. **5.** $96\sqrt{3}/125$. **6.** $-1 \leqslant a < 1/5$.

ВАРИАНТ 2003 (май), механико-математический факультет, 2.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{1}{|4-\log_4 16x^2|} + \frac{1}{|7-\log_2 2x|} \leqslant \frac{1}{|\log_4 8x|}.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$\sin\frac{x}{2} \cdot \sqrt{\cos x} + \cos\frac{x}{2} \cdot \sqrt{5\cos(2x+\pi) - 5 + 9\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = 0.$$

Задача 3. В треугольнике ABC с углом $\angle A = 40^\circ$ и стороной $AB = \sqrt{3}$ на высоте AH взята такая точка D, что $\angle BDC = 140^\circ$ и $CD = 1$. Найдите угол между прямыми AB и CD , а также $\angle ABC$.

Задача 4. Числа p и q подобраны так, что уравнение

$$3^{2+x} + p = q3^{2-x}$$

имеет ровно два различных корня, а их сумма равна 2. Найдите произведение всех различных корней уравнения

$$(x^2 - 10x - 3000)(x^2 - px + q) = 0.$$

Задача 5. Пирамида $SABCD$ с боковыми ребрами $BS = CS = DS = 4$ вписана в сферу радиуса $\frac{5}{2}$. Линия пересечения плоскостей ASD и BSC касается сферы. Найдите объем пирамиды, если $BC = CD = \frac{12}{5}$.

Задача 6. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\log_x \frac{x+a}{ax+1} + \log_{x-1} \frac{x+a-1}{ax-a+1} \geqslant 0$$

имеет хотя бы 4 целочисленных решения.

Ответы. 1. $0 < x \leqslant 1, x \neq 1/8$. **2.** $\alpha = \pi/2 + \pi n$, $\alpha = -\arccos\sqrt{4/5} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **3.** 90°, 80°. **4.** 27000. **5.** $576\sqrt{3}/125$. **6.** $-1/6 < a \leqslant 1$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), механико-математический факультет, 1.

Задача 1. Решите неравенство

$$5\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}}+4\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}}\leqslant 9\sqrt{x+4}.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$|5^{\log_x 122}-x^{\log_5 x}+614|=636-5^{\log_x 122}-x^{\log_5 x}.$$

Задача 3. Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем меньше последнего, но не более чем на 17, а сумма ее членов со второго по последний не меньше 26. Найдите знаменатель прогрессии.

Задача 4. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямой BC, а через вершины B и C — другая окружность, касающаяся прямой AB. Продолжение общей хорды BD этих окружностей пересекает отрезок AC в точке E, а продолжение хорды AD одной окружности пересекает другую окружность в точке F. Найдите отношение $AE : EC$, если $AB = 5$ и $BC = 9$. Сравните площади треугольников ABC и ABF.

Задача 5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\arccos(5x)=a+\arcsin\sin(7x-3)$$

имеет единственное решение.

Задача 6. Высота AH тетраэдра $ABCD$ пересекается с его высотой BE, но не лежит в одной плоскости ни с одной из других его высот. На отрезке $HE = 4$ взята точка O, равноудаленная от граней тетраэдра, образующая двугранный угол в 30° при ребре $CD = 5$. Найдите площадь сечения тетраэдра, проходящего через точку O и являющегося прямоугольником.

Ответы. 1. -3. **2.** $1/25$. **3.** 2. **4.** $25 : 81$, одинаковы. **5.** $\alpha=\pi-3+\sqrt{74}/5$, $\pi-3-7/5\leqslant\alpha<\pi-3+7/5$. **6.** $10(2-\sqrt{3})$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), механико-математический факультет, 2.

Задача 1. Решите неравенство

$$4 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}} + 3 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}} \geqslant 7\sqrt{x-2}.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$|x^{\log_2 x} - 2^{\log_x 126} - 507| = 517 - x^{\log_2 x} - 2^{\log_x 126}.$$

Задача 3. Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем меньше последнего, но не более чем на 15, а сумма ее членов со второго по последний не меньше 23. Найдите знаменатель прогрессии.

Задача 4. Через точку A общей хорды BC двух пересекающихся окружностей проведена прямая, пересекающая окружности в таких точках D и E соответственно, что прямая BD касается одной окружности, а прямая BE — другой. Продолжение хорды CD одной окружности пересекает другую окружность в точке F. Найдите отношение $BD : BE$, если $AD = 8$ и $AE = 2$. Сравните площади треугольников BDE и BDF.

Задача 5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\arccos\cos(5x+4) - a = \cos\arcsin(6x)$$

имеет единственное решение.

Задача 6. Высота AH тетраэдра $ABCD$ пересекается с его высотой BE, но не лежит в одной плоскости ни с одной из других его высот. На отрезке $HE = 3$ взята точка O, равноудаленная от граней тетраэдра, образующая двугранный угол в 45° при ребре $CD = 4$. Найдите площадь сечения тетраэдра, проходящего через точку O и являющегося прямоугольником.

Ответы. 1. 3. **2.** 1/8. **3.** 2. **4.** 2 : 1, одинаковы. **5.** $2\pi - 4 - 5/6 < \alpha \leqslant \leqslant 2\pi - 4 + 5/6$, $\alpha = 2\pi - 4 + \sqrt{61}/6$. **6.** $6(2-\sqrt{2})$.

ВАРИАНТ 2003, механико-математический факультет, задачи устного экзамена.

Задача 1. Числовая функция для любых действительных чисел x, y удовлетворяет равенству

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 80xy.$$

Найдите $f(4/5)$, если $f(1/4) = 2$.

Задача 2. Найдите тройку натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению $xa^{x+1} = ya^{x-1} - a$ как при $a = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$, так и при $a = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$. Конечно ли множество таких троек?

Задача 3. Для каких целых n выражение $\frac{n^3-n^2/5-n+115}{5n^2-4n-1}$ принимает целочисленные значения?

Задача 4. На окружности с центром O и радиусом 4 отмечены точки A и B, причем $\angle AOB = 60^\circ$. Этой окружности касаются внутренним образом две другие окружности: первая в точке A, вторая в точке B. Две последние окружности касаются друг друга в точке X. Какую линию заполняют все возможные положения точки X? Найдите длину этой линии.

Ответы. 1. 24. **2.** $x = 3$, $y = z = 1$; нет. **3.** $n = 0,-5$. **4.** Меньшая дуга AB (без концов) окружности, касающейся сторон угла $\angle AOB$ в точках A и B; $8\pi/(3\sqrt{3})$.

ВАРИАНТ 2003 (апрель), факультет вычислительной математики и кибернетики, 1.

Задача 1. Сумма первых тридцати членов геометрической прогрессии с ненулевым первым членом и ненулевым знаменателем равна удвоенной сумме ее первых десяти членов. Найдите знаменатель этой прогрессии.

Задача 2. В равнобедренном треугольнике $ABC\,(AB = BC)$ отношение расстояний от центра вписанной в этот треугольник окружности до вершин углов B и C соответственно равно k. Найдите углы треугольника ABC. Каковы возможные значения k?

Задача 3. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{-\sin x} \leqslant \sqrt{\cos x^3 + \sin x^2}, \\ \frac{\pi}{4} < \left| x + \frac{\pi}{2} \right| \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Задача 4. В прямоугольном параллелепипеде $KLMNK_1L_1M_1N_1$ среди всех сечений, проходящих через точки L, N_1 и произвольную точку A, лежащую на ребре L_1K_1, выбирается сечение наименьшей площади. Найдите диагонали этого сечения, если известно, что

$$KK_1 = a, \quad K_1N_1 = b \quad \text{и} \quad LK_1 = d.$$

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2^{3x^2+2y^2+8x-4y+8} + 2^{2x^2+4y+5} \leqslant 33 \cdot 2^{x^2+y^2+4x+4}, \\ x^2 + y^2 - 8x + 8y = a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, но среди этих решений нет удовлетворяющих условию $x + y = 0$.

Задача 6. Решите неравенство

$$\arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x) \geqslant 3x - 18.$$

Ответы. 1. $q = -1$; $\pm\sqrt[10]{(\sqrt{5}-1)/2}$. **2.** $\angle A = \angle C = \alpha$, $\angle B = \pi - 2\alpha$, где $\alpha = 2\arcsin\frac{\sqrt{8k^2+1}-1}{4k}$; $k > 0$. **3.** $\{-5\pi/2\} \cup \{3\pi/2\} \cup (-\pi/4; 0] \cup \cup \left[-9\pi/4 - \arcsin\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}; -2\pi\right]$. **4.** $\sqrt{b^2+d^2}$; $\sqrt{a^2+b^2+\frac{(d^2-a^2)(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}}$. **5.** $a \in \left(44 - 24\sqrt{2}; 44 + 24\sqrt{2}\right)$. **6.** $\left(-\infty; \frac{4\pi+18}{5}\right] \cup [8\pi - 18; 18 - 3\pi]$.

ВАРИАНТ 2003 (апрель), факультет вычислительной математики и кибернетики, 2.

Задача 1. Найдите знаменатель геометрической прогрессии с ненулевым первым членом и ненулевым знаменателем, если у нее сумма первых восемнадцати членов равна упятерённой сумме ее первых шести членов.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C отношение расстояний от центра вписанной в этот треугольник окружности до вершин углов A и B соответственно равно n. Найдите углы треугольника ABC. Каковы возможные значения n?

Задача 3. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{-\cos x} \leqslant \sqrt{\sin x^3 + \cos x^2}, \\ \frac{\pi}{4} < |x - \pi| \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Задача 4. В прямой призме $KLMNK_1L_1M_1N_1$ основание $KLMN$ — прямоугольник с неравными сторонами $LK = a$ и $LM = b$. Через диагональ K_1M призмы проведена плоскость, пересекающая боковые ребра LL_1 и NN_1 соответственно в точках A и B таким образом, что площадь сечения призмы минимальна. Известно, что $AB = d$. Найдите углы наклона прямых, содержащих диагонали сечения, с плоскостью основания.

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 7^{2x^2+2y^2+13x+10y+13} + 7^{x+2y-8} \leqslant 344 \cdot 7^{x^2+y^2+7x+6y+1}, \\ x^2 + y^2 - 18x - 12y = a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, но среди этих решений нет удовлетворяющих условию $2x = 3y$.

Задача 6. Решите неравенство

$$2\arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x) \geqslant -x - 3.$$

Ответы. **1.** $\left\{-1; \pm\sqrt[6]{(\sqrt{17}-1)/2}\right\}$. **2.** $\angle A = \alpha$, $\angle B = \frac{\pi}{2} - \alpha$, где $\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{n\sqrt{2}+1}$; $n > 0$. **3.** $\{\pi\} \cup \{3\pi\} \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{4} - \arcsin\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]$. **4.** $\arccos\left((\sqrt{a^2+b^2})/d\right)$; $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{(a^2+b^2)(d^2-a^2-b^2)} \cdot \frac{1}{|a^2-b^2|}\right)$. **5.** $a \in$ $\in (92 - 8\sqrt{13}; 92 + 8\sqrt{13})$. **6.** $\left[-\frac{3}{4} - \frac{3\pi}{2}; -\pi + \frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), факультет вычислительной математики и кибернетики (отделение специалистов), 1.

Задача 1. Решите неравенство

$$\log_{\left(\frac{3-x}{2}\right)}\left(\frac{6}{x+1}\right) \geqslant -1.$$

Задача 2. Решите уравнение $\sqrt{\sin x \cdot \sin 3x} = \cos x$.

Задача 3. Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x.$$

Задача 4. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ вписана сфера радиуса $2\sqrt{6}$. Через точку касания этой сферы с боковой гранью SAB параллельно прямой AB проведена секущая плоскость $\mathcal{P}$, проходящая через ближайшую к вершине S точку сферы. Известно что $AB = 12\sqrt{2}$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$.

Задача 5. Найдите все значения параметра α, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 2^{x+y} \leqslant \frac{108\alpha-161}{2\alpha-3}, \\ 5 \cdot 2^{x+y} - 9 \cdot 4^y \geqslant 54 \end{cases}$$

имеет решение.

Задача 6. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 3$, $AD = \sqrt{3} + 1$ и $\angle BAD = 60^\circ$. На стороне AB взята такая точка K, что $AK : KB = 2 : 1$. Через точку K параллельно AD проведена прямая. На этой прямой внутри параллелограмма выбрана точка L, а на стороне AD выбрана выбрана точка M так, что $AM = KL$. Прямые BM и CL пересекаются в точке N. Найдите величину угла BKN.

Ответы. 1. $(1;-1)\cup[2;3)$. **2.** $\left\{\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **3.** $\left[-2;-\frac{3}{2}\right)\cup[-1;+\infty)$. **4.** $27\sqrt{3}$. **5.** $\alpha \in \left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **6.** $\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{7\pi}{12}$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), факультет вычислительной математики и кибернетики (отделение специалистов), 2.

Задача 1. Решите неравенство

$$\log_{\left(\frac{2}{3x+1}\right)}\left(\frac{2}{4x-1}\right) \geqslant 1.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 3x \cdot \cos x} = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Задача 3. Найдите множество значений функции

$$y = x - \sqrt{x^2 + x - 2}.$$

Задача 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина высоты, опущенной из вершины S на основание $ABCD$, равна $6\sqrt{2}$.

Через точку касания с боковой гранью SAB вписанного в эту пирамиду шара параллельно прямой AB проведена секущая плоскость $\mathcal{P}$, проходящая через ближайшую к вершине S точку шара. Известно что $AB = 4\sqrt{6}$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$.

Задача 5. Найдите все значения параметра β, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 25^x - 5^{x+y} \leqslant \frac{24\beta-115}{3\beta-2}, \\ 3 \cdot 5^{x+y} - 4 \cdot 25^y \geqslant 8 \end{cases}$$

имеет решение.

Задача 6. Дан параллелограмм $KLMN$, у которого $KL = 6$, $KN = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ и $\angle LKN = 45°$. На стороне KL взята такая точка A, что $KA : AL = 1 : 2$. Через точку A параллельно LM проведена прямая, на которой внутри параллелограмма выбрана точка B. На стороне KN выбрана выбрана точка C так, что $KC = AB$. Прямые LC и AB пересекаются в точке D. Найдите величину угла LAD.

Ответы. **1.** $(1/4; 1/3) \cup [2; +\infty)$. **2.** $\{\pi/8 + 2\pi k; 5\pi/8 + 2\pi n; k, n \in \mathbb{Z}\}$. **3.** $(-\infty; -2] \cup (1/2; 1]$. **4.** $9\sqrt{3}$. **5.** $\beta \in (2/3; +\infty)$. **6.** $5\pi/12$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), факультет вычислительной математики и кибернетики (отделение бакалавров), 1.

Задача 1. Решите неравенство $3|x+2| - 4|x+1| \leqslant 2$.

Задача 2. Решите неравенство

$$\log_{\left(\frac{1-2x}{3}\right)} \left(\frac{12}{3x+4}\right) \leqslant -1.$$

Задача 3. Решите уравнение $\sqrt{-\cos x \cdot \cos 3x} = -\sin x$.

Задача 4. При всех значениях параметра c решите уравнение

$$4^x + c \cdot 25^x = 3 \cdot 10^x.$$

Задача 5. Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{x^2 + 5x + 4} - x.$$

Задача 6. Боковое ребро SA правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равно $4\sqrt{5}$. Через точку касания с боковой гранью SAB

вписанной в эту пирамиду сферы параллельно прямой AB проведена секущая плоскость $\mathcal{P}$, проходящая через ближайшую к вершине S точку сферы. Известно, что $AB = 8$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$.

Задача 7. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 5$, $AD = 2\sqrt{3} + 2$ и $\angle BAD = 30^\circ$. На стороне AB взята такая точка K, что $AK : KB = 4 : 1$. Через точку K параллельно AD проведена прямая. На этой прямой внутри параллелограмма выбрана точка L, а на стороне AD выбрана выбрана точка M так, что $AM = KL$. Прямые BM и CL пересекаются в точке N. Найдите величину угла BKN.

Ответы. **1.** $[-8/7; 0]$. **2.** $(-4/3; -1) \cup [0; 1/2)$. **3.** $\{5\pi/4 + 2\pi k; 7\pi/4 + 2\pi n; k, n \in \mathbb{Z}\}$. **4.** Если $c \leqslant 0$, то $x = \log_{2/5} \frac{3+\sqrt{9-4c}}{2}$; если $0 < c < \frac{9}{4}$, то $x = \log_{2/5} \frac{3\pm\sqrt{9-4c}}{2}$; если $c = \frac{9}{4}$, то $x = \log_{2/5} \frac{3}{2}$; если $c > \frac{9}{4}$, то решений нет. **5.** $[1; 5/2) \cup [4; +\infty)$. **6.** $6\sqrt{3}$. **7.** $5\pi/12$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), факультет вычислительной математики и кибернетики (отделение бакалавров), 2.

Задача 1. Решите неравенство $5|x-2| - 2|x-31| \geqslant 1$.

Задача 2. Решите неравенство

$$\log_{\left(\frac{4}{3x-4}\right)} \left(\frac{2}{2x-5}\right) \leqslant 1.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin x \cdot \cos 3x} = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Задача 4. При всех значениях параметра d решите уравнение

$$4^x + d \cdot 49^x = 4 \cdot 14^x.$$

Задача 5. Найдите множество значений функции

$$y = x - \sqrt{x^2 - 2x - 3}.$$

Задача 6. В правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ апофема равна $4\sqrt{2}$. Через точку касания с боковой гранью SAB вписанного в эту пирамиду шара параллельно прямой AB проведена секущая плоскость $\mathcal{P}$, проходящая через ближайшую к вершине S точку шара. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$.

Задача 7. Дан параллелограмм $KLMN$, у которого $KL = 8$, $KN = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ и $\angle LKN = 45^\circ$. На стороне KL взята такая точка A, что $KA : AL = 3 : 1$. Через точку A параллельно LM проведена прямая, на которой внутри параллелограмма выбрана точка B. На стороне KN выбрана выбрана точка C так, что $KC = AB$. Прямые LC и AB пересекаются в точке D. Найдите величину угла LAD.

Ответы. **1.** $\left[1; \frac{17}{7}\right]$. **2.** $\left(\frac{5}{2}; \frac{8}{3}\right) \cup [6; +\infty)$. **3.** $\left\{\frac{\pi}{8} + 2\pi k; \frac{13\pi}{8} + 2\pi n;\ k, n \in \mathbb{Z}\right\}$. **4.** Если $d \leqslant 0$, то $x = \log_{2/7}(2 + \sqrt{4-d})$; если $0 < d < 4$, то $x = \log_{2/7}(2 \pm \sqrt{4-d})$; если $d = 4$, то $x = \log_{2/7} 2$; если $d > 4$, то решений нет. **5.** $(-\infty; -1) \cup (1; 3]$. **6.** $3\sqrt{3}$. **7.** $\frac{7\pi}{12}$.

ВАРИАНТ 2003 (март), физический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение

$$\cos 3x - 2\sin 2x - \cos x - \sin x - 1 = 0.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$7\log_3 (2+x)^8 < 8\log_2 (-x+1)^7 \cdot \log_3 2.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$(4^x - 2 \cdot 2^x - 3)\log_2 x - 3 \geqslant 4^{\frac{x+1}{2}} - 4^x.$$

Задача 4. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ $AC = 4\sqrt{3}$, радиус вписанной окружности равен 3. Прямая AE пересекает высоту BD в точке E, а вписанную окружность — в точках M и N (M лежит между A и E), $ED = 2$. Найдите EN.

Задача 5. Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{17}{2x^2+3y} + \dfrac{12}{3x^2-2y} = 3, \\ \dfrac{6}{3x^2-2y} + \dfrac{34}{2x^2+3y} = 3 \end{cases}$$

и изобразите на координатной плоскости Oxy ее решения.

Задача 6. Площадь треугольника равна $6\sqrt{6}$, его периметр равен 18, расстояние от центра вписанной окружности до одной из вершин равно $\frac{2\sqrt{42}}{3}$. Найдите наименьшую сторону треугольника.

Задача 7. Для каждого допустимого значения a в уравнении

$$\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{a}-x}=a$$

1) найдите число различных решений уравнения, 2) найдите эти решения.

Задача 8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1\|$ $\|BB_1\|CC_1$), объем которой равен 4, проведено сечение плоскостью AC_1B. В пирамиду $C_1AA_1B_1B$ вписан шар. Найдите 1) площадь сечения AC_1B; 2) радиус сферы, описанной около данной призмы.

Ответы. **1.** $-\pi/2+2\pi n$, $(-1)^{n+1}\pi/12+\pi n/2$, $n\in\mathbb{Z}$. **2.** $x<-2$, $-2<x<-1/2$. **3.** $0<x\leqslant 1/2$; $x\geqslant \log_2 3$. **4.** $(1+\sqrt{33})/2$. **5.** $(-2;3)$, $(2;3)$. **6.** 5. **7.** Если $a=0$, то единственное решение $x=0$; если $0<a<1$, то решений нет; если $1\leqslant a<2^{2/3}$, то два решения $x=\left(a\pm\sqrt{2\sqrt{a}-a^2}\right)^2/4$; если $a=2^{2/3}$, то единственное решение $x=2^{-2/3}$; если $a>2^{2/3}$, то решений нет. **8.** $5\sqrt{3}/3$, $2\sqrt{6}/3$.

ВАРИАНТ 2003 (март), физический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$\sin 3x-2\sin 2x+\sin x+\cos x-1=0.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$6\log_7(3+x)^5>5\log_2(1-x)^6\cdot\log_7 2.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$(9^x-2\cdot 3^{x+1}-7)\log_3 x+7\geqslant 3^{2x}-2\cdot 9^{\frac{x+1}{2}}.$$

Задача 4. В равнобокую трапецию $ABCD$ ($BC\|AD$) вписана окружность, касающаяся сторон BC и AD в точках E и F соответственно, $AD=2\sqrt{7}$, $EF=4$. Прямая DM пересекает отрезок EF в точке M, а вписанную окружность — в точках K и L (K лежит между D и M), $FM:ME=3$. Найдите KM.

Задача 5. Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{42}{5y^2-2x} - \dfrac{23}{2y^2+5x} = 2, \\ \dfrac{46}{2y^2+5x} + \dfrac{14}{5y^2-2x} = 3 \end{cases}$$

и изобразите на координатной плоскости Oxy ее решения.

Задача 6. Периметр треугольника равен 20, площадь его равна $10\sqrt{2}$, отрезок биссектрисы от одной из вершин до центра вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найдите наибольшую сторону треугольника.

Задача 7. Для каждого допустимого значения a в уравнении

$$\sqrt{\sqrt{2a}-x} - 2a + \sqrt{x} = 0$$

найдите 1) число различных решений уравнения; 2) эти решения.

Задача 8. В правильной треугольной призме $KLMK_1L_1M_1$ ($KK_1\|$ $\|LL_1\|MM_1$) проведено сечение плоскостью KL_1M. Площадь боковой грани призмы равна $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. В пирамиду $L_1KK_1M_1M$ вписан шар. Найдите 1) объем данной призмы; 2) радиус сферы, описанной около данной призмы.

Ответы. **1.** $(-1)^{n+1}\pi/12 + \pi n/2$, $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **2.** $-1 < x < 1$, $x > 1$. **3.** $0 < x \leqslant \log_3 7$; $x \geqslant 3$. **4.** $3 + \sqrt{57}/4$. **5.** $(3;-2)$, $(3;2)$. **6.** 9. **7.** Если $a = 0$, то единственное решение $x = 0$; если $0 < a < 1/2$, то решений нет; если $1/2 \leqslant a < 2^{-1/3}$, то два решения $x = \left(2a \pm \sqrt{2\sqrt{2a} - 4a^2}\right)^2/4$; если $a = 2^{-1/3}$, то единственное решение $x = 2^{-2/3}$; если $a > 2^{-1/3}$, то решений нет. **8.** 4, $2\sqrt{6}/3$.

ВАРИАНТ 2003 (май), физический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение $2\sin(6\cos x \cdot \cos 2x - 3\cos 3x) = 1$.

Задача 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 9^x \cdot 7^{2y} = 27, \\ 5^y \cdot 4^{x+1} = 32. \end{cases}$$

Задача 3. Решите неравенство $\left[\log_5(x^2-5x+6)\right]^{-1} < \log_{20} 5$.

Задача 4. В треугольнике KLM даны стороны: $KL = m$, $LM = k$, $MK = l$. Биссектрисы KA и MB пересекаются в точке O, диагонали четырехугольника $AOBL$ пересекаются в точке C. Найдите $BC : CA$.

Задача 5. Решите неравенство $\sqrt{12x^2 + 42x + 1} + |2x^2 + 7x| \geqslant 9$.

Задача 6. Окружность проходит через вершину угла ABC и отсекает на его сторонах равные отрезки BA и BC, $\angle ABC = \alpha$. Другая окружность касается отрезков BA и BC в точках M и N соответственно, а также касается первой окружности. Найдите $MN : AC$.

Задача 7. Для каждого допустимого значения a решите неравенство

$$\sqrt{7 - \log_a x^2} > (\log_a x)(1 - 2\log_{|x|} a).$$

Задача 8. Сфера касается плоскости основания ABC правильной треугольной пирамиды $SABC$ в точке C, а также касается бокового ребра SA в точке M, $SM : MA = 1 : 2$, $AB = a$. Найдите радиус сферы.

Ответы. 1. $\pm\arccos(\pi/18) + 2\pi n, \pm\arccos(5\pi/18) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **2.** $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$. **3.** $x < -2$; $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < 2$; $3 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$; $x > 7$. **4.** $\frac{l+m}{l+k}$. **5.** $x \leqslant -4$; $x \geqslant \frac{1}{2}$. **6.** $\big(1 + \sin(\alpha/2)\big)^{-1}$. **7.** Если $0 < a < 1$, то $a^3 < x < 1$, $x > 1$; если $a > 1$, то $0 < x < 1$, $1 < x < a^3$. **8.** $2a\sqrt{3/23}$.

ВАРИАНТ 2003 (май), физический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$2\cos(8\sin 3x \cdot \cos 2x - 4\sin 5x) + 1 = 0.$$

Задача 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{2y+2} \cdot 13^x = 64, \\ 5^{3x} \cdot 9^{4y} = 81. \end{cases}$$

Задача 3. Решите неравенство $\big[\log_2(x^2 + 7x + 12)\big]^{-1} < \log_{56} 2$.

Задача 4. В треугольнике ABC даны стороны: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Биссектриса AM пересекает биссектрису BN в точке K. Отрезки MN и CK пересекаются в точке L. Найдите $ML : LN$.

Задача 5. Решите неравенство $7 - |2x^2 - 7x| \leqslant \sqrt{4 - 8x^2 + 28x}$.

Задача 6. Около равнобедренного треугольника $KLM\,(KL = LM)$ описана окружность, $\angle KLM = \beta$. Другая окружность касается сторон KL и LM в точках A и B соответственно, а также касается первой окружности. Найдите отношение площади $\triangle ALB$ к площади $\triangle KLM$.

Задача 7. Для каждого допустимого значения b решите неравенство

$$\sqrt{7+\log_b x^2} + (\log_b |x|)(1 + 2\log_x b) > 0.$$

Задача 8. В правильной треугольной пирамиде $SKLM$ (S – вершина) $KL = b$. Сфера касается плоскости основания KLM пирамиды в точке L, а также касается бокового ребра SK в точке A, $SA : AK = 2 : 1$. Найдите радиус сферы.

Ответы. **1.** $(-1)^n \arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **2.** $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. **3.** $x < -11$; $\frac{-7-\sqrt{5}}{2} < x < -4$; $-3 < x < \frac{-7+\sqrt{5}}{2}$; $x > 4$. **4.** $\frac{c+a}{c+b}$. **5.** $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3$. **6.** $(1+\sin(\beta/2))^{-2}$. **7.** Если $0 < b < 1$, то $0 < x < 1$ и $1 < x < b^{-3}$; если $b > 1$, то $b^{-3} < x < 1$ и $x > 1$. **8.** $(5b/2) \cdot \sqrt{3/26}$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), физический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x - 6\cos 2x = 6$.

Задача 2. Решите неравенство $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geqslant 0$.

Задача 3. Решите неравенство $\log_{25}(5^x - 1) \cdot \log_5(5^{x+2} - 25) < 4$.

Задача 4. В трапеции $KLMN$ ($LM \| KN$) точка A — середина отрезка MN, LA — биссектриса $\angle KLM$, средняя линия равна $\sqrt{5}$, $KA = 4$. Найдите LA.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9 - |x+2y|, \\ x(x+4y-2) + y(4y+2) = 41. \end{cases}$$

Задача 6. В треугольнике KLM радиус описанной окружности равен R, $\angle K = \alpha$, точка O — центр окружности, вписанной в этот треугольник. Прямая KO пересекает окружность, описанную около $\triangle KLM$, в точке N. Найдите ON.

Задача 7. Для каждого значения a решите неравенство

$$\frac{x^2 \cdot 2^{|2a-1|} - 2x + 1}{x^2 - (a-2)x - 2a} > 0.$$

Задача 8. В пирамиде $SLMN$ даны ребра: $LM = 5$, $MN = 9$, $NL = 10$. Сфера радиуса $\dfrac{5}{4\sqrt{14}}$ касается плоскости основания LMN и боковых ребер пирамиды. Точки касания делят эти ребра в равных отношениях, считая от вершины S. Найдите объем пирамиды.

Ответы. **1.** $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **2.** $x \leqslant -\dfrac{2}{3}$, $x \geqslant \dfrac{1}{2}$. **3.** $\log_5 626 - 4 < < x < \log_5 26$. **4.** 2. **5.** $x = 5$, $y = 1$; $x = \dfrac{1}{3}$, $y = -\dfrac{11}{3}$. **6.** $2R\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **7.** Если $a = \dfrac{1}{2}$, то $x < -2$ и $\dfrac{1}{2} < x < 1$, $x > 1$; если $a < -2$, то $x < a$ и $x > -2$; если $a = -2$, то $x < -2$ и $x > -2$; если $-2 < a < \dfrac{1}{2}$, $a > \dfrac{1}{2}$, то $x < -2$ и $x > a$. **8.** $\dfrac{1125}{224}$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), физический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение $2\cos 2x + 2\operatorname{tg}^2 x = 5$.

Задача 2. Решите неравенство $|x^2 - 4x| + x^2 - \dfrac{9}{8} \leqslant 0$.

Задача 3. Решите неравенство $\log_2(2^x - 4) \cdot \log_4(2^{x+1} - 8) < 6$.

Задача 4. В трапеции $BCDE$ ($CD \parallel BE$) точка M — середина отрезка BC, EM — биссектриса $\angle DEB$, $EM = 4$, $CD + BE = 5$. Найдите DM.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x - 2y| = 11 - \sqrt{x + y}, \\ x(x - 2) + y(4y - 4x - 2) = 17. \end{cases}$$

Задача 6. Точка O — центр вписанной окружности треугольника BCD, $\angle C = \beta$. Прямая CO пересекает окружность, описанную около $\triangle BCD$, в точке A, $OA = a$. Найдите радиус окружности, описанной около $\triangle BCD$.

Задача 7. Для каждого значения a решите неравенство

$$\frac{x^2 \cdot 4^{|1-4a|} - 4x + 4}{x^2 + (4 - a)x - 4a} > 0.$$

Задача 8. В пирамиде $SABC$ даны ребра: $AB = 7$, $BC = 8$, $CA = 9$. Сфера радиуса $\dfrac{7}{2\sqrt{5}}$ касается боковых ребер SA, SB и SC

в точках E, F и G, а также касается плоскости основания. Плоскость EFG параллельна плоскости ABC. Найдите объем пирамиды.

Ответы. **1.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **2.** $-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9}{32}$. **3.** $\log_2 65-4 < x < \log_2 12$. **4.** 3. **5.** $x = 13$, $y = 3$; $x = \frac{25}{3}$, $y = \frac{23}{3}$. **6.** $\frac{a}{2\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$. **7.** Если $a = \frac{1}{4}$, то $x < -4$, $\frac{1}{4} < x < 2$, $x > 2$; если $a < -4$, то $x < a$ и $x > -4$; если $a = -4$, то $x < -4$ и $x > -4$; если $-4 < a < \frac{1}{4}$, $a > \frac{1}{4}$, то $x < -4$ и $x > a$. **8.** $\frac{63}{2}$.

ВАРИАНТ 2003 (май), химический факультет, 1.

Задача 1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 + (a+1)x + 1 = 0$ имеет единственное решение.

Задача 2. Решите неравенство

$$x \cdot \log_3 x + 1 \geqslant \log_3 x \cdot \log_2 3 + x \cdot \log_3 2.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$\sin\frac{(x+1)\pi}{4x^2-4x+2} = \cos\frac{(x-2)\pi}{4x^2-4x+2}.$$

Задача 4. В треугольной пирамиде $ABCD$ известны длины рёбер: $AD = 3$ см, $CD = 5$ см, а также углы: $\angle ABD = \angle CBD = \angle BAC = \pi/2$; кроме того, угол между гранями ABC и ADC равен $\pi/12$. Найдите объём пирамиды.

Задача 5. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} y^3 - 3x^2 - 4y + 18x - 26 > 0, \\ y^3 + x^2 - 4y - 8x + 14 < 0. \end{cases}$$

Задача 6. В пятиугольник $ABCDE$ вписана окружность, P — точка касания этой окружности со стороной BC. Найдите длину отрезка BP, если известно, что длины всех сторон пятиугольника есть целые числа, $AB = 1$ и $CD = 3$.

Ответы. **1.** $a = 0$, $a = 1$. **2.** $(0; \log_2 3] \cup [2; +\infty)$. **3.** $x = 1$, $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$, $x = (5 \pm \sqrt{5})/10$. **4.** $3/2$. **5.** $(3; 0)$, $(3; 2)$, $(3; -2)$. **6.** $1/2$.

ВАРИАНТ 2003 (май), химический факультет, 2.

Задача 1. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $(b+1)x^2+(b+2)x+1=0$ имеет единственное решение.

Задача 2. Решите неравенство

$$x\cdot\log_2 x+1\geqslant\log_2 x\cdot\log_3 2+x\cdot\log_2 3.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$\sin\frac{(x+2)\pi}{4x^2+4x+2}=\cos\frac{(x-1)\pi}{4x^2+4x+2}.$$

Задача 4. В треугольной пирамиде $EFGH$ известны длины рёбер: $|EH|=4$ см, $|GH|=5$ см, а также углы: $\angle EFH=\angle GFH=\angle FEG=$ $=\pi/2$; кроме того, угол между гранями EFG и EHG равен $\pi/4$. Найдите объём пирамиды.

Задача 5. Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} y^3-3x^2-9y+24x-47>0,\\ y^3+x^2-9y-10x+23<0.\end{cases}$$

Задача 6. В пятиугольник $FGHTE$ вписана окружность, A — точка касания этой окружности со стороной GH. Найдите длину отрезка $|GA|$, если известно, что длины всех сторон пятиугольника есть целые числа, $|FG|=1$ и $|HT|=4$.

Ответы. **1.** $b=-1$, $b=0$. **2.** $(0;\log_3 2]\cup[3;+\infty)$. **3.** $x=0$, $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$. **4.** 4. **5.** $(4;0)$, $(4;3)$, $(4;-3)$. **6.** 1/2.

ВАРИАНТ 2003 (июль), химический факультет, факультет наук о материалах, 1.

Задача 1. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$\frac{a}{x-a}>0$$

содержит точку $x=1$.

Задача 2. Решите уравнение

$$\cos^2 8x + \sin^2 x = 2\sin^2 x \cdot \cos^2 8x.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(2 - |x-1|) > \log_{\sqrt{10}}(2x - x^2).$$

Задача 4. Решите уравнение

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) \cdot (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) = 8.$$

Задача 5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AC \perp BD$. Найдите длину $|BC|$, если расстояние от центра окружности до стороны AD равно 2.

Задача 6. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (x+\sqrt{2}z)^2 + (y+\sqrt{2}t)^2 = 25 + 2a\sqrt{25-a^2}, \\ x^2 + y^2 = a^2, \\ z^2 + t^2 = (25-a^2)/2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответы. 1. $a \in (0;1)$. **2.** $\pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.** $x \in (0;2)$. **4.** $x = 0$. **5.** 4. **6.** $a \in [-5;5]$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), химический факультет, факультет наук о материалах, 2.

Задача 1. Найдите все значения параметра b, при которых множество решений неравенства

$$\frac{b}{x+b} < 0$$

содержит точку $x = 2$.

Задача 2. Решите уравнение

$$\cos^2 8x + \cos^2 x = 2\cos^2 x \cdot \cos^2 8x.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(2-|x|) > \log_{\sqrt{10}}(1-x^2).$$

Задача 4. Решите уравнение

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})=8.$$

Задача 5. Четырёхугольник $KLMN$ вписан в окружность. Диагонали четырёхугольника KM и LN перпендикулярны. Найдите расстояние от центра окружности до стороны KN, если $|LM|=4$.

Задача 6. При каких значениях параметра b система

$$\begin{cases}(x+\sqrt{3}z)^2+(y-\sqrt{3}t)^2=36+2\cdot b\cdot\sqrt{36-b^2},\\ x^2+y^2=b^2,\\ z^2+t^2=(36-b^2)/3\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответы. **1.** $b\in(-2;0)$. **2.** πn, $n\in\mathbb{Z}$. **3.** $x\in(-1;1)$. **4.** $x=0$. **5.** 2. **6.** $a\in[-6;6]$.

ВАРИАНТ 2003 (апрель), факультет наук о материалах, 1.

Задача 1. Решите уравнение

$$2^x 5^{\frac{x+2}{x}}=100.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(1+(x^2-3x+2)^2\right)=\sqrt{x^2-6x+8}.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$\frac{4x}{|x-2|-1}\geqslant 3.$$

Задача 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна $3a$. Точки K и L лежат на ребрах BB_1 и DD_1 соответственно, причем $BK:KB_1=DL:LD_1=2:1$. Через точки A, K, L проведена плоскость. Найдите диагонали многоугольника, который образуется при сечении данного куба плоскостью AKL.

Задача 5. Дана арифметическая прогрессия $a_1, \ldots, a_{81}$ с первым членом $a_1 = \frac{\pi}{4}$ и разностью $\frac{3\pi}{10}$. Найдите количество членов a_n этой прогрессии, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x \sin a_n + y \cos a_n = 1, \\ x \operatorname{tg} a_n - y \operatorname{ctg} a_n = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

Задача 6. Автомобиль, двигаясь от пункта A до пункта B, проехал первую треть пути со скоростью v_1, а оставшиеся две трети – со скоростью v_2. На обратном пути автомобиль половину всего времени движения от B до A проехал со скоростью v_1, а вторую половину – со скоростью v_2. Известно, что средняя скорость движения от A до B в $a > 1$ раз больше скорости движения от B к A. Найдите все значения a, при которых задача нахождения отношения скоростей v_2 и v_1 имеет решение.

Ответы. 1. 2, $\log_2 5$. **2.** 2. **3.** $[3/7; 1) \cup (3; +\infty)$. **4.** $3\sqrt{2}a$, $7a/2$, $9a/2$. **5.** 8. **6.** $(1; 18 - 12\sqrt{2}]$.

ВАРИАНТ 2003 (апрель), факультет наук о материалах, 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$3^x 4^{\frac{6-x}{x}} = 144.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}(1 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}) = |x^2 + 2x - 15|.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$\frac{3x}{|x-3| - 1} \geqslant 2.$$

Задача 4. Дан куб $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. Длина ребра куба равна $4a$. Точки K и L лежат на ребрах NN_1 и QQ_1 соответственно, причем $NK : KN_1 = QL : LQ_1 = 3 : 1$. Через точки M, K, L проведена плоскость. Найдите диагонали многоугольника, который образуется при сечении данного куба плоскостью MKL.

Задача 5. Дана арифметическая прогрессия $a_1, \ldots, a_{71}$ с первым членом $a_1 = -\frac{\pi}{4}$ и разностью $\frac{7\pi}{10}$. Найдите количество членов a_n этой прогрессии, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x \sin a_n + y \cos a_n = 1, \\ x \operatorname{tg} a_n + y \operatorname{ctg} a_n = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

Задача 6. Автомобиль, двигаясь от пункта A до пункта B, проехал первую четверть пути со скоростью v_1, а оставшиеся три четверти — со скоростью v_2. На обратном пути автомобиль половину всего времени движения от B до A проехал со скоростью v_1, а вторую половину — со скоростью v_2. Известно, что средняя скорость движения от A до B в $a > 1$ раз больше скорости движения от B к A. Найдите все значения a, при которых задача нахождения отношения скоростей v_2 и v_1 имеет решение.

Ответы. **1.** 2, $3\log_3 4$. **2.** 3. **3.** $[4/5; 2) \cup (4; +\infty)$. **4.** $4\sqrt{19}a/3$, $4\sqrt{2}a$, $\sqrt{217}a/3$. **5.** 7. **6.** $(1; 8 - 4\sqrt{3}]$.

ВАРИАНТ 2003 (апрель), биологический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение $\log_2(1 + 2x) = 1 + 2\log_2 x$.

Задача 2. Решите неравенство

$$1 - \sqrt{\frac{1 - x}{7 - 4x}} \leqslant x.$$

Задача 3. В симпозиуме по математическим проблемам в биологии, проходившем в течение трех дней, участвовали биологи и математики. В первый день работы симпозиума в нем приняли участие ученые обеих специальностей. На второй день на симпозиум прибыли дополнительно специалисты по математике; при этом доля числа биологов в общем числе участников симпозиума изменилась, и разность ее значений в первый и во второй день составила $1/20$. На третий день к работе симпозиума присоединились специалисты-биологи, в результате чего доля числа математиков в общем количестве участников изменилась, и разность ее значений во второй и третий день составила

7/100. По окончании симпозиума оказалось, что первоначальная доля числа биологов больше окончательной доли числа математиков, причем разность их значений равна 1/25. Найдите долю числа биологов среди участников симпозиума в первый день.

Задача 4. Решите уравнение

$$4 \cdot 3^{2x+\frac{1}{2x}} - 8 \cdot 3^{x+\frac{1}{4x}} + 2 = |4 \cdot 3^{x+\frac{1}{4x}} - 1|.$$

Задача 5. В квадрате $ABCD$ точка M лежит на стороне BC, а точка N — на стороне AB. Прямые AM и DN пересекаются в точке O. Найдите площадь квадрата, если известно, что $DN = 4$, $AM = 3$, а косинус угла DOA равен q.

Задача 6. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a - f(x)} = 0, \\ y^2 + (a - 5 \cdot 10^6)y + 25 \cdot 10^{10} = 0, \\ z^2 + 5 \cdot 10^3 \cdot z + a = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, где

$$f(x) = |x - 1^2| + |x - 2^2| + \ldots + |x - 203^2|.$$

Ответы. **1.** $(1 + \sqrt{3})/2$. **2.** $[3/4; 1] \cup (7/4; +\infty)$. **3.** $51/100$. **4.** $x_{1,2} = (A \pm \sqrt{A^2 - 1})/2$, где $A = \log_3\big((3 - \sqrt{6})/2\big)$. **5.** $(144q^2)/(25 - 24\sqrt{1 - q^2})$. **6.** $a \in [2101608; 4000000] \cup [600 \cdot 10^4; 625 \cdot 10^4]$.

ВАРИАНТ 2003 (апрель), биологический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$\log_9(3 + 2x) = \frac{1}{2} + 2\log_9 x.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$3 \leqslant x + \sqrt{\frac{3 - x}{26 - 8x}}.$$

Задача 3. Слушателями первой лекции были студенты и студентки. На второй лекции к ним присоединились несколько студентов; при этом доля числа студенток в общем числе слушателей изменилась, и разность ее значений для первой и второй лекции составила 1/25. На третьей лекции аудитория пополнилась несколькими студентками, в результате чего доля числа студентов в общем числе слушателей изменилась, и разность её значений для второй и третьей лекции составила 3/100. Определите, увеличилась или уменьшилась доля студенток от первой до третьей лекции, и найдите разность её значений для первой и третьей лекции.

Задача 4. Решите уравнение

$$20 \cdot 2^{2x+\frac{1}{2x}} - 21 \cdot 2^{x+\frac{1}{4x}} + 5 = 5 \cdot |3 \cdot 2^{x+\frac{1}{4x}} - 1|.$$

Задача 5. В квадрате $PQRS$ точка B лежит на стороне RS, а точка A — на стороне SP. Отрезки QB и RA пересекаются в точке T, причём косинус угла BTR равен $-0,2$. Найдите сторону квадрата, если известно, что $RA = 10$, а $QB = a$.

Задача 6. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (\log_b f(x) - 1)^2 + (y^2 - 5 \cdot 10^3 \cdot y + 2b)^2 = 0, \\ z^2 - (b - 2 \cdot 10^6) \cdot z + 25 \cdot 10^{10} = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, где

$$f(x) = |x| + |x - 1^2| + |x - 2^2| + \ldots + |x - 104^2|.$$

Ответы. **1.** $(1 + \sqrt{10})/2$. **2.** $[11/4; 3] \cup (13/4; +\infty)$. **3.** Уменьшилась на 1/100. **4.** $x_{1,2,3,4} = (A_{1,2} \pm \sqrt{A_{1,2}^2 - 1})/2$, где $A_1 = \log_2((9 - \sqrt{31})/10)$, $A_2 = \log_2(3/10)$. **5.** $(2a)/\sqrt{100 + a^2 - 8\sqrt{6}a}$. **6.** $a \in [286624; 1000000] \cup$ $\cup [3000 \cdot 10^3; 3125 \cdot 10^3]$.

ВАРИАНТ 2003 (май), факультет фундаментальной медицины, 1.

Задача 1. Решите уравнение $\log_{(-1-x)}(4x + 25) = 2$.

Задача 2. Найдите все x, при которых

$$\sin x, \quad \operatorname{tg} x, \quad 1/\cos x$$

являются последовательными членами геометрической прогрессии.

Задача 3. Решите неравенство $\sqrt{2-x} - \sqrt{4+x} \leqslant \sqrt{x+3}$.

Задача 4. Из точки A, находящейся вне окружности с центром в точке O, проведены касательные AB и AC, AO пересекается с окружностью в точке D, с BC в точке F. Известно, что $S_{DCF} = S_{ABD}$. Найдите угол OCB.

Задача 5. Найдите область значений функции

$$\log_{16x-12-4x^2}\left(\frac{|x+1|+|x-5|}{3}\right).$$

Задача 6. Найдите все действительные значения параметра a, при которых не найдётся ни одной такой пары чисел $(u; v)$, чтобы функция

$$f(x) = vx^4 + a(au-1)x^3 - 2u - 2$$

удовлетворяла одновременно условиям $f(-1) \geqslant -2u$, $f(1) \leqslant -2$.

Задача 7. Количество сотрудников корпорации ежегодно возрастало в геометрической прогрессии и за 6 лет увеличилось на 20615 человек. Найдите первоначальную численность сотрудников корпорации.

Ответы. **1.** -4. **2.** $\pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **3.** $[(-1-2\sqrt{29})/5; 2]$. **4.** 30°. **5.** $(-\infty; 0) \cup [1/2; +\infty)$. **6.** $a = -1$. **7.** 1984.

ВАРИАНТ 2003 (май), факультет фундаментальной медицины, 2.

Задача 1. Решите уравнение $\log_{3-x}(x+3) = 1/2$.

Задача 2. Найдите все x, при которых

$$\sin 2x, \quad \operatorname{tg} x, \quad 1/(1-\cos 2x)$$

являются последовательными членами геометрической прогрессии.

Задача 3. Решите неравенство $\sqrt{6+x} - \sqrt{5-x} \leqslant \sqrt{2-x}$.

Задача 4. Из точки K, находящейся вне окружности с центром в точке O, проведены касательные KL и KM. Отрезок KO пересекается с окружностью в точке N, и с отрезком LM в точке P. Прямая MN пересекает отрезок KL в точке Q. Известно, что площади треугольников S_{KNQ} и S_{LNP} равны. Найдите отношение длин $KM : MN$.

Задача 5. Найдите область значений функции

$$\log_{2x+8-x^2}\left(\frac{|x+4|-|x+3|}{3}\right).$$

Задача 6. Найдите все действительные значения параметра b, при которых для любой пары чисел $(s;t)$ функция

$$f(x) = tx^4 - s(b^2-4)x^3 + bx - s - 2$$

удовлетворяет хотя бы одному из условий $f(1) > -2$, $f(-1) < 2$.

Задача 7. Количество жителей посёлка ежегодно возрастало в геометрической прогрессии и за 6 лет увеличилось на 37037 человек. Найдите первоначальную численность жителей посёлка.

Ответы. **1.** -1. **2.** $\pi/4+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **3.** $[-6;(-11+2\sqrt{79})/5]$. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** $(-\infty;-1/2]\cup(0;+\infty)$. **6.** $b=2$. **7.** 8019.

ВАРИАНТ 2003 (май), географический факультет, факультет биоинженерии и биоинформатики, 1.

Задача 1. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{2}-4x\right)+\operatorname{tg}x = \sqrt{3}\left(1-\frac{\operatorname{tg}4x}{\operatorname{ctg}x}\right).$$

Задача 2. В треугольнике ABC проведены медиана BM и биссектриса BK. Известно, что $\angle ABM = \pi/4$, $\angle CBM = \pi/6$, $AK = 6$. Найдите KM.

Задача 3. Решите неравенство

$$2\sqrt{9-x^2} < x + 3(\sqrt{2}+1) - |x+3(\sqrt{2}-1)|.$$

Задача 4. Двум тракторам T_1 и T_2 необходимо вспахать два поля А и Б. Если трактор T_1 начнет вспахивать поле А и в то же время трактор T_2 начнет вспахивать поле Б, то к моменту, когда трактор T_1 закончит работу на поле А, трактору T_2 останется вспахать a гектаров поля Б. Если же, наоборот, одновременно трактор T_1 начнет работать на поле Б, а трактор T_2 на поле А, то к моменту, когда трактор T_1 закончит вспахивать поле Б, трактору T_2 останется b гектаров на поле А. Известно, что числа a и b различны, а разность $b-a$, уменьшенная на 25%, равна разности площадей полей А и Б, выраженной в гектарах. Какова производительность трактора T_2, если производительность трактора T_1 равна 9300 м^2/день?

Задача 5. Плоскость α параллельна оси цилиндра и делит границу каждого из оснований на две части, длины которых относятся как $2:1$. Сфера касается боковой поверхности цилиндра, а также обоих его оснований и плоскости α в точках, лежащих в одной плоскости с осью цилиндра. Найдите отношение объема цилиндра к объему сферы, если известно, что оно больше $5\sqrt{23}$.

Задача 6. При каких значениях q числа

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{243}} 3}; \qquad \sqrt{16-q^2}\cos 3x + q\sin 3x; \qquad 15 - q\cdot 2^{1-|y|}$$

существуют, но в указанном порядке не образуют арифметическую прогрессию ни при каких x и y?

Ответы. 1. $\frac{\pi}{15}+\frac{\pi}{5}n,\ n\in\mathbb{Z}$. **2.** $3(\sqrt{2}-1)$. **3.** $\left[-3;-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};0\right)\cup$ $\cup\,(0;3]$. **4.** 3100 м^2/день. **5.** $24:1$. **6.** $[-4;1)$.

ВАРИАНТ 2003 (май), географический факультет, факультет биоинженерии и биоинформатики, 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 4x + \operatorname{ctg}\left(\frac{13\pi}{2}+x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{ctg} x}\right).$$

Задача 2. В треугольнике PQR проведены медиана QA и биссектриса QB. Известно, что $\angle PQA = 3\pi/4$, $\angle RQA = \pi/6$, $RB = 4$. Найдите AB.

Задача 3. Решите неравенство

$$2\sqrt{25-x^2} < 5(\sqrt{2}+1) - x - |5(\sqrt{2}-1) - x|.$$

Задача 4. Два насоса H_1 и H_2 должны откачать воду из двух наполненных до краев бассейнов А и Б. Если насос H_2 начнет откачивать воду из бассейна А и в то же время насос H_1 начнет работу в бассейне Б, то к моменту, когда бассейн А станет пустым, в бассейне Б останется r литров воды. Если же, наоборот, одновременно насос H_2 начнет работать в бассейне Б, а насос H_1 в бассейне А, то к моменту, когда бассейн Б опустеет, в бассейне А останется s литров воды. Известно, что числа r и s различны, а разность $s-r$, уменьшенная на 20%, равна разности объемов бассейнов А и Б, выраженной в литрах. Какова производительность насоса H_1, если производительность насоса H_2 равна 6800 м^3/день?

Задача 5. Плоскость β параллельна образующей цилиндра и делит боковую поверхность на две части, площади которых относятся как 2 : 1. Сфера касается боковой поверхности цилиндра, а также обоих его оснований и плоскости β в точках, лежащих в одной плоскости с осью цилиндра. Найдите отношение объема сферы к объему цилиндра, если известно, что оно больше $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 6. При каких значениях c числа

$$c \cdot 3^{1-|v|} - 13; \qquad c\cos 2u - \sqrt{9-c^2}\sin 2u; \qquad \frac{1}{\log_{\frac{1}{625}}(5^{-1})}$$

существуют, но в указанном порядке не образуют арифметическую прогрессию ни при каких u и v?

Ответы. **1.** $\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}n$, $n \in \mathbb{Z}$. **2.** $2-\sqrt{2}$. **3.** $[-5;0)\cup\left(0;\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};5\right]$. **4.** 1700 м^3/день. **5.** $\frac{3}{8}$. **6.** $[-3;1)$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), биологический факультет, факультет фундаментальной медицины, факультет биоинженерии и биоинформатики, 1.

Задача 1. Решите уравнение

$$2\cos^2(x+\pi/4) + 3\cos(2x+\pi/2) = -3.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-2}}{4-2x} \geqslant -1.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1.$$

Задача 4. Три мотоциклиста A, B и C участвовали в показательном заезде, двигаясь по трассе от старта до финиша с постоянными скоростями. Мотоциклисты A и C стартовали одновременно, а мотоциклист B спустя некоторое время. Первым к финишу пришёл мотоциклист A. Мотоциклист B через 1 час после своего старта догнал мотоциклиста C на трассе и прибыл на финиш через 4 часа после старта мотоциклистов A и C и за 2 часа до финиша мотоциклиста C. Найдите отношение скорости мотоциклиста A к скорости мотоциклиста C, если известно, что мотоциклист A двигался в $8/5$ раза медленнее мотоциклиста B.

Задача 5. В ромбе $ABCD$ через точки A, B, C проведена окружность с центром в точке O_1, а через точки A, B, D проведена окружность с центром в точке O_2. Известно, что отношение длины отрезка O_1O_2 к длине отрезка AO_2 равно 4. Найдите величину угла DAO_2.

Задача 6. Решите неравенство

$$(3-x)\log_2(1+\sqrt{7})^{x^2+3x+2} > \sqrt{2-x}\,\log_3(8+2\sqrt{7})^{(x+1)\sqrt{x+1}}.$$

Ответы. **1.** $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **2.** $(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};2)\cup\big[(8+\sqrt{10})/3;+\infty\big)$. **3.** $2^{\frac{-1-\sqrt{33}}{2}}$. **4.** $\frac{15}{8}$. **5.** $\arcsin\big((\sqrt{6}-2)/2\big)$. **6.** $(-1;2]$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), биологический факультет, факультет фундаментальной медицины, факультет биоинженерии и биоинформатики, 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$4\sin^2(x-\pi/8)-5\cos(2x-\pi/4)=-5.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{16-x^2}}{3-x}\leqslant 1.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$\log_x\sqrt{5x^{-1}}\cdot\sqrt{\log_{25}x}=-1.$$

Задача 4. Три пустых бассейна D, F и G одинакового объёма заполняли водой из труб с постоянными производительностями. Бассейны D и G начали заполнять одновременно, а бассейн F позднее. Первым был заполнен бассейн D. Через 20 минут после начала заполнения бассейна F объём воды в нём сравнялся с объёмом воды в бассейне G. Бассейн F был заполнен через 80 минут после начала заполнения бассейнов D и G и за 40 минут до окончания заполнения бассейна G. Определите, на сколько минут позже начали заполнять бассейн F, чем бассейны D и G, если известно, что бассейн F заполнялся в $5/3$ раза быстрее бассейна D.

Задача 5. В ромбе $ABCD$ через точки B, C, D проведена окружность с центром в точке O_1, а через точки A, B, C проведена окружность с центром в точке O_2. Известно, что отношение длины отрезка O_1O_2 к длине отрезка BO_2 равно 3. Найдите величину угла ABO_2.

Задача 6. Решите неравенство

$$(4-x)\log_3(2+\sqrt{5})^{x^2+5x+6} > \sqrt{3-x}\log_4(9+4\sqrt{5})^{(x+2)\sqrt{x+2}}.$$

Ответы. **1.** $\pi/8+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **2.** $[-4;(3-\sqrt{23})/2]\cup(3;4]$. **3.** $5^{5+2\sqrt{6}}$. **4.** 40 минут. **5.** $\arcsin\big((\sqrt{17}-3)/4\big)$. **6.** $(-2;3]$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), географический факультет, 1.

Задача 1. Разность девятого и третьего членов знакочередующейся геометрической прогрессии равна ее шестому члену, умноженному на $\frac{24}{5}$. Найдите отношение десятого члена прогрессии к её пятому члену.

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{6}{|x|} \geqslant 7+x.$$

Задача 3. Непустое множество X состоит из конечного числа N натуральных чисел. Четных чисел в множестве X меньше двух третей от N, а нечетных не больше 36% от N. Какое минимальное значение может принимать число N?

Задача 4. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, перпендикулярны. Известно, что $AC=4$, $\angle CAB+\angle DBA=75^\circ$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$ и сравните ее с числом $2\sqrt{15}$.

Задача 5. При каких значениях параметра a уравнение

$$(\sin x - \log_4 a)(\sin x - 2 + 2a) = 0$$

имеет ровно два корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$?

Ответы. **1.** $-5^{-\frac{5}{3}}$. **2.** $(-\infty; -6] \cup [-1; 0) \cup \big(0; (\sqrt{73} - 7)/2\big]$. **3.** 14. **4.** $2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$, меньше. **5.** $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \{1\} \cup \left(\frac{3}{2}; 4\right]$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), географический факультет, 2.

Задача 1. Разность двенадцатого и второго членов знакочередующейся геометрической прогрессии равна ее седьмому члену, умноженному на $\frac{8}{3}$. Найдите отношение одиннадцатого члена прогрессии к её четвертому члену.

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{8}{|x|} \geqslant 9 - x.$$

Задача 3. Непустое множество Y состоит из конечного числа L действительных чисел, отличных от нуля. Положительных чисел в множестве Y меньше трех четвертей от L, а отрицательных не более 27% от L. Какое минимальное значение может принимать число L?

Задача 4. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника $PQRS$, перпендикулярны. Известно, что $S_{PQRS} = 2$, $\angle PRS + \angle QSR = 15°$. Найдите квадрат длины отрезка PR и сравните результат с числом $4\sqrt{15}$.

Задача 5. При каких значениях параметра b уравнение

$$(\cos x - \log_6 b)(\cos x - 3 + 3b) = 0$$

имеет ровно два корня на отрезке $[0; 2\pi]$?

Ответы. **1.** $-3^{-\frac{7}{5}}$. **2.** $\big[(-\sqrt{113} + 9)/2; 0\big) \cup (0; 1] \cup [8; +\infty)$. **3.** 15. **4.** $8\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, меньше. **5.** $\left(\frac{1}{6}; \frac{2}{3}\right) \cup \{1\} \cup \left(\frac{4}{3}; 6\right]$.

ВАРИАНТ 2003 (май), факультет почвоведения, 1.

Задача 1. Решите уравнение

$$\log_{\sqrt{3}}(4^x - 1) - \log_{\sqrt{3}}(2^x - 1) = 2.$$

Задача 2. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x = 1$.

Задача 3. Если двухзначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 8. Если же число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, разделить на разность цифры десятков и цифры единиц исходного числа, то в частном получится -15, а в остатке 2. Найдите это число.

Задача 4. Найдите все целочисленные решения $(x; y; z)$ уравнения

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

Задача 5. Решите неравенство

$$\log_{-4x^2+12x-8} |4x - 5| > 0.$$

Задача 6. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите периметр и площадь сечения, проведённого через диагональ DC_1, параллельно BD_1.

Ответы. **1.** $x = 1$. **2.** $\pi/12 + \pi n/2$, $n \in \mathbb{Z}$. **3.** 74. **4.** $(7k; 3k; 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$. **5.** $(1; 5/4) \cup (5/4; 3/2)$. **6.** $P = a(\sqrt{2} + \sqrt{5})$, $S = \sqrt{6}a^2/4$.

ВАРИАНТ 2003 (май), факультет почвоведения, 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$\log_{\sqrt{2}}(9^x - 1) - \log_{\sqrt{2}}(3^x - 1) = 4.$$

Задача 2. Решите уравнение $2\sqrt{3}\cos^2 x - \sin^2 x = \sqrt{3}$.

Задача 3. Если двухзначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 8, а в остатке 1. Если же число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, разделить на разность цифры десятков и цифры единиц исходного числа, то в частном получится 4, а в остатке 2. Найдите это число.

Задача 4. Найдите все целые решения $(x; y; z)$ уравнения

$$34x^2 + y^2 + 5z^2 - 10xy - 22xz + 2yz = 0.$$

Задача 5. Решите неравенство

$$\log_{-9x^2+24x-15}|6x-7| > 0.$$

Задача 6. Ребро куба $MNKLM_1N_1K_1L_1$ равно b. Найдите периметр и площадь сечения, проведённого через диагональ MN_1 параллельно NL_1.

Ответы. **1.** $x = 1$. **2.** $\pi/6 + \pi n/2$, $n \in \mathbb{Z}$. **3.** 41. **4.** $(2k; 7k; 3k)$, $k \in \mathbb{Z}$. **5.** $(1; 7/6) \cup (7/6; 4/3)$. **6.** $P = b(\sqrt{2} + \sqrt{5})$, $S = \sqrt{6}b^2/4$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), факультет почвоведения, 1.

Задача 1. Решите уравнение

$$\cos^2 4x - 2\cos 4x - 3 = 0.$$

Задача 2. Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\log_7(x-y) + 7^{xy} = 1, \\ 7^{xy} + \log_7(x-y) = 1. \end{cases}$$

Задача 3. Решите неравенство $3x^2/2 - |x| \geqslant 0$.

Задача 4. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{3x^2+5} - \sqrt{3x^2}$$

на отрезке $[0; 3]$.

Задача 5. В окружность радиуса 2 вписан угол QPR так, что PR — диаметр окружности. В угол QPR вписана ещё одна окружность радиуса $3/4$ так, что она касается большей окружности внутренним образом. Найдите величину угла QPR.

Задача 6. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых отрезок $[-3; -1]$ целиком содержится среди решений неравенства $\frac{x-3b}{b-2x} < 0$.

Ответы. **1.** $\pi/4 + \pi n/2$, $n \in \mathbb{Z}$. **2.** $(0; -1)$; $(1; 0)$. **3.** $(-\infty; 2/3] \cup \{0\} \cup [2/3; +\infty)$. **4.** $4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$. **5.** $2\,\mathrm{arctg}(1/4)$. **6.** $(-\infty; -6) \cup (-1/3; +\infty)$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), факультет почвоведения, 2.

Задача 1. Решите уравнение $\sin^2 5x - 3\sin 5x + 2 = 0$.

Задача 2. Решите систему

$$\begin{cases} 3\log_3(x+y) + 3^{xy} = 4, \\ 3^{xy} - (1/2)\log_3(x+y) = 1/2. \end{cases}$$

Задача 3. Решите неравенство $3|y|/4 - y^2 \leqslant 0$.

Задача 4. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{8x^2+7} - \sqrt{8x^2}$$

на отрезке $[1; 2]$.

Задача 5. В окружность радиуса 4 вписан угол RPQ так, что PQ — диаметр окружности. В угол RPQ вписана ещё одна окружность радиуса $3/2$ так, что она касается большей окружности внутренним образом. Найдите величину угла RPQ.

Задача 6. Найдите все значения параметра c, при каждом из которых отрезок $[-5; -2]$ целиком содержится среди решений неравенства $\frac{11c-x}{x-3c} < 0$.

Ответы. **1.** $\pi/10 + 2\pi n/5,\ n \in \mathbb{Z}$. **2.** $(0; 3)$; $(3; 0)$. **3.** $(-\infty; -3/4] \cup \{0\} \cup$ $\cup\, [3/4; +\infty)$. **4.** $\sqrt{39} - 4\sqrt{2}$. **5.** $2\,\mathrm{arctg}(1/4)$. **6.** $(-\infty; -5/3) \cup (-2/11; +\infty)$.

ВАРИАНТ 2003 (май), геологический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos^2 x = 1.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\log_{-2-x}(-3-2x) \geqslant \log_{-2-x}\left(-\frac{3x}{2}\right).$$

Задача 3. Целые числа k, n и m в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию с целым знаменателем. Известно, что число m на 39 больше, чем k, а прогрессия не является возрастающей. Чему равна сумма чисел k, n и m?

Задача 4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-6x-7}}{x-7} \geqslant \frac{x+1}{3}.$$

Задача 5. Окружность пересекает стороны угла BAC в точках B, N, M и C, точка N находится между A и B, точка M — между A и C. Величины углов ACB и BMC равны $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{4}$ соответственно, $BN = 2MN$. Чему равна величина угла BAC?

Задача 6. При каких значениях параметра a уравнение

$$2\pi^2(x-1)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$$

имеет единственное решение?

Задача 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{2-x} = 4y\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2+y^2+1-2x} + \sqrt{x^2+y^2-6x-2y+10} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Задача 8. Длина стороны правильного треугольника ABC равна $\sqrt{3}$. На перпендикуляре, восстановленном из вершины A к плоскости этого треугольника, отложен отрезок $AD = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Найдите расстояние между прямыми AB и DC.

Ответы. 1. $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}; k, n \in \mathbb{Z}$. **2.** $(-\infty; -6] \cup (-3; -2)$. **3.** 39. **4.** $(-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup (7; 8]$. **5.** $\angle BAC = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}$ (другая форма ответа: $\angle BAC = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$). **6.** $\left\{0; -\frac{2}{3}\right\}$. **7.** $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$. **8.** $\frac{3}{\sqrt{31}}$.

ВАРИАНТ 2003 (май), геологический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 = 2\sin^2 x.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\log_{-3-x}(-4-3x) \geqslant \log_{-3-x}\left(-\frac{5x}{2}\right).$$

Задача 3. Целые числа k, n и m в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию с целым знаменателем. Известно, что число m на 21 больше, чем k, а прогрессия не является возрастающей. Чему равна сумма чисел k, n и m?

Задача 4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-4x-12}}{x-6} \geqslant \frac{x+2}{3}.$$

Задача 5. Окружность пересекает стороны угла FEG в точках F, N, M и G, точка N находится между E и F, точка M — между E и G. Величины углов FNM и MFG равны $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$ соответственно, $FN = \sqrt{2}MN$. Чему равна величина угла FEG?

Задача 6. При каких значениях параметра a уравнение

$$2\pi^2(x-2)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 25a^3 = 0$$

имеет единственное решение?

Задача 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{1+x} = 32y\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2+y^2+2-2x-2y} + \sqrt{x^2+y^2-6x+9} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Задача 8. Длина стороны правильного треугольника ABC равна $\sqrt{3}$. На перпендикуляре, восстановленном из вершины A к плоскости этого треугольника, отложен отрезок $AD = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Найдите расстояние между прямыми AB и DC.

Ответы. **1.** $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}; k,n\in\mathbb{Z}$. **2.** $(-\infty;-8]\cup(-4;-3)$. **3.** 21. **4.** $(-\infty;-3]\cup\{-2\}\cup(6;7]$. **5.** $\angle FEG = \frac{5\pi}{12} - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. **6.** $\left\{0;-\frac{2}{5}\right\}$. **7.** $\left(\frac{5}{2};\frac{1}{4}\right)$. **8.** $\frac{3}{2\sqrt{13}}$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), геологический факультет, 1.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{x-2}{|x+2|} + \frac{2x+5}{x+2} \leqslant 0.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$4^{x+\frac{1}{2}} - 7^{x-\frac{1}{2}} = 7^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x+1}.$$

Задача 3. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и, встретившись через 50 минут, без остановки продолжили движение каждый в своем направлении. За какое время проходит путь между A и B каждый из пешеходов, если известно, что первый пришел в B на 4 часа раньше, чем второй пришел в A?

Задача 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + 3 = 0, \\ 6y^3 - 18y - 13x^3 - 3x = 0. \end{cases}$$

Задача 5. Прямоугольный треугольник ABC вписан в окружность. Из вершины C прямого угла проведена хорда CM, пересекающая гипотенузу в точке K. Найдите площадь треугольника ABM, если $AK : AB = 1 : 4$, $BC = \sqrt{2}$, $AC = 2$.

Задача 6. Решите уравнение $\sqrt{\cos 3x} \cdot \log_4\big(\operatorname{tg}(x + \sqrt{3}/2)\big) = 0$.

Задача 7. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует нечетное число n, удовлетворяющее равенству $3^a n^2 - 3^a + 3^{4-a} n^2 = 96n + 3^{4-a}$.

Задача 8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S отношение высоты SO к длине стороны основания равно $\sqrt{5}$. Через точку M, лежащую на стороне основания BC, и боковое ребро SA проведена плоскость; при этом точка M выбрана так, что площадь сечения пирамиды этой плоскостью является наименьшей. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Ответы. **1.** $[-7;-2) \cup (-2;-1]$. **2.** $\{1/2\}$. **3.** Первый пешеход прошел путь за 1 час, второй — за 5 часов. **4.** $(x;y) = (0;\sqrt{3})$; $(0;-\sqrt{3})$; $\left(\sqrt{\frac{3}{119}}; 11\sqrt{\frac{3}{119}}\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{3}{119}}; -11\sqrt{\frac{3}{119}}\right)$. **5.** $S = \frac{9}{19}\sqrt{2}$. **6.** $\{\pm\pi/6 + \pi n;\ \pi/4 - \sqrt{3}/2 + 2\pi k;\ k, n \in \mathbb{Z}\}$. **7.** $a \in \left\{\log_3(18 \pm 9\sqrt{3}); \log_3(10 \pm \sqrt{19})\right\}$. **8.** $V_{SABM} : V_{SAMCD} = 1 : 41$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), геологический факультет, 2.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{x+3}{|x-3|} - \frac{3x-7}{x-3} \leqslant 0.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$3^{x-\frac{1}{2}} - 2^{4x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 16^x.$$

Задача 3. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и, встретившись через 40 минут, без остановки продолжили движение каждый в своем направлении. За какое время проходит путь между A и B каждый из пешеходов, если известно, что первый пришел в B на 1 час позже, чем второй пришел в A?

Задача 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 2x^2 - 2 = 0, \\ 4y^3 - 8y - 2x - 9x^3 = 0. \end{cases}$$

Задача 5. Прямоугольный треугольник ABC вписан в окружность. Из вершины C прямого угла проведена хорда CM, пересекающая гипотенузу в точке K. Найдите площадь треугольника ABM, если $BK : AB = 3 : 4$, $BC = 2\sqrt{2}$, $AC = 4$.

Задача 6. Решите уравнение $\sqrt{-\sin 4x} \cdot \log_3 \left(\operatorname{tg}(x - 1/\sqrt{2})\right) = 0$.

Задача 7. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует нечетное число n, удовлетворяющее равенству $7^a n^2 - 7^a + 7^{2-a} n^2 = 60n + 7^{2-a}$.

Задача 8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S отношение высоты SO к длине стороны основания равно $\sqrt{7}$. Через точку M, лежащую на стороне основания BC, и боковое ребро SA проведена плоскость; при этом точка M выбрана так, что площадь сечения пирамиды этой плоскостью является наименьшей. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Ответы. **1.** $[1;3) \cup (3;5]$. **2.** $\{1/2\}$. **3.** Первый пешеход затратил на путь 2 час, второй — 1 час. **4.** $(x;y) = (0;\sqrt{2})$; $(0;-\sqrt{2})$; $\left(\sqrt{\frac{2}{47}}; 7\sqrt{\frac{2}{47}}\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{2}{47}}; -7\sqrt{\frac{2}{47}}\right)$. **5.** $S = \frac{36}{19}\sqrt{2}$. **6.** $\{\pi/4 + \pi n; \pi/2 + \pi m; \pi/4 + \sqrt{2}/2 + \pi k;$ $k, m, n \in \mathbb{Z}\}$. **7.** $a \in \{\log_7 (20 \pm 3\sqrt{39}); \log_7 (8 \pm \sqrt{15})\}$. **8.** $V_{SAMCD} : V_{SABM} =$ $= 57 : 1$.

ВАРИАНТ 2003 (март), филологический факультет.

Задача 1. Решите неравенство $(2^x + 5)^{-1} < (2^{x+3} - 2)^{-1}$.

Задача 2. Сколько различных корней имеет уравнение

$$\sin 5\pi x + \cos 2\pi x = 0$$

на отрезке $[-2; 0]$?

Задача 3. Даны такие арифметическая прогрессия a_n и геометрическая прогрессия b_n, что $a_1 = b_1$, $a_4 = b_3$, $a_2 a_3 - b_2^2 = 8$. Найдите разность арифметической прогрессии.

Задача 4. Отрезки AC и BD — диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$. Углы DAC и ABD равны соответственно γ и δ, сторона $CD = a$. Найдите площадь треугольника ACD.

Задача 5. Вовочка написал домашнее сочинение и допустил орфографические и пунктуационные ошибки. Затем его сестра проверила сочинение и исправила часть ошибок. В новом тексте количество пунктуационных ошибок оказалось в пределах от $15,5\%$ до 18% от числа пунктуационных ошибок в старом тексте. Количество орфографических ошибок уменьшилось втрое и составило 25% от числа пунктуационных ошибок в первоначальном тексте. а) Может ли в новом тексте содержаться ровно 6 ошибок? б) Какое наименьшее число ошибок могло содержаться в первоначальном тексте?

Ответы. 1. $(-2; 0)$. **2.** 9. **3.** ± 2. **4.** $\frac{1}{2}(a^2)\frac{\sin\delta \cdot \sin(\gamma+\delta)}{\sin\gamma}$. **5.** а) нет; б) 21.

ВАРИАНТ 2003 (июль), филологический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение $\cos 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$.

Задача 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos y \cdot 3^{x^3+8} = 27^{x^2+2x} \cdot |\cos y|, \\ 2\sin y = \log_2 x. \end{cases}$$

Задача 3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медианы AM и CN пересекаются в точке D под прямым углом. Найдите все углы треугольника ABC и площадь четырехугольника $NBMD$, если основание $AC = 1$.

Задача 4. В двух группах учится одинаковое количество студентов. Каждый студент изучает по крайней мере один язык: английский или французский. Известно, что 5 человек в первой и 5 человек во второй группе изучают оба языка. Количество изучающих французский в первой группе в 3 раза меньше, чем во второй. Количество изучающих английский во второй группе в 4 раза меньше, чем в первой. Каково минимально возможное количество студентов в одной группе?

Задача 5. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых для любого a неравенство

$$(x-a-2b)^2+(y-3a-b)^2<\frac{1}{2}$$

имеет хотя бы одно целочисленное решение $(x;y)$.

Ответы. **1.** $\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **2.** $(1,2\pi k);(\frac{1}{4},-\frac{\pi}{2}+2\pi m);(4,\frac{\pi}{2}+2\pi n)$, где $k,m,n\in\mathbb{Z}$. **3.** $\angle A=\angle C=\operatorname{arctg}3$; $\angle B=\pi-2\operatorname{arctg}3$, $\frac{1}{4}$. **4.** 28. **5.** $b\neq\frac{k}{5}$, $k\in\mathbb{Z}$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), филологический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$\sin 4x=\sin^4 x-\cos^4 x.$$

Задача 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sin y\cdot 2^{x^3+27}=128^{x^2+3x}\cdot|\sin y|,\\ 2\cos y=\log_3 x.\end{cases}$$

Задача 3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) медианы AM и CN пересекаются в точке D под прямым углом. Найдите все углы треугольника ABC и его основание AC, если площадь четырехугольника $NBMD$ равна 4.

Задача 4. В двух группах учится одинаковое количество студентов. Каждый студент изучает по крайней мере один язык: испанский или французский. Известно, что 5 человек в первой и 6 человек во второй группе изучают оба языка. Количество изучающих французский во второй группе в 3 раза больше, чем в первой. Количество изучающих испанский в первой группе в 4 раза больше, чем во второй. Каково минимально возможное количество студентов в одной группе?

Задача 5. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых найдется такое a, что неравенство

$$(x-a-2b)^2+(y-a-3b)^2<\frac{1}{2}$$

не имеет целочисленных решений $(x; y)$.

Ответы. 1. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **2.** $(1, \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$; $(9, 2\pi n)$; $(1/9, \pi + 2\pi m)$, где $k, n, m \in \mathbb{Z}$. **3.** $\angle A = \angle C = \operatorname{arctg} 3$; $\angle B = \pi - 2\operatorname{arctg} 3, 4$. **4.** 34. **5.** $\frac{n}{7} - \frac{1}{14}$, $n \in \mathbb{Z}$.

ВАРИАНТ 2003 (апрель), экономический факультет (отделение менеджмента), 1.

Задача 1. Решите уравнение $2 \cdot 4^x - 31 \cdot 2^x - 16 = 0$.

Задача 2. Для заготовки сена фермер три раза с интервалом в неделю скашивал на заливном лугу одно и то же количество травы. После трех покосов масса травы на лугу уменьшилась на $78,3\%$ по сравнению с её первоначальным значением до начала покосов. Определите, сколько процентов от первоначальной массы травы на лугу составляет масса всей скошенной травы, если еженедельный прирост травы составляет 10%.

Задача 3. Высота правильного треугольника ABC со стороной 1 совпадает с одной из сторон прямоугольного треугольника DEF, углы которого составляют арифметическую прогрессию. При каком взаимном расположении треугольников ABC и DEF площадь их общей части окажется наименьшей? Найдите эту площадь.

Задача 4. Решите уравнение

$$6x \cdot \sqrt{1 - 9x^2} + 18x^2 - 3\sqrt{2}x - 1 = 0.$$

Задача 5. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение

$$b^2 \sin\left(\frac{\pi + 2}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2x}{b+1} - \frac{2}{b+1}\right) - \\ - b\sqrt{4x^2 + 8 - 8x} \;=\; 3 + \arcsin|1 - x|$$

имеет единственное решение.

Ответы. 1. 4. **2.** 90%. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{16}$. **4.** $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}\right\}$. **5.** $b = 3$.

ВАРИАНТ 2003 (апрель), экономический факультет (отделение менеджмента), 2.

Задача 1. Решите уравнение $25^x + 24 \cdot 5^x - 25 = 0$.

Задача 2. Мясомолочный кооператив, который откармливает стадо бычков, три раза с интервалом в один месяц поставлял на рынок одно и то же количество живого веса телятины. После трех поставок оказалось, что общий живой вес стада увеличился на $7{,}6\%$ по сравнению с его первоначальным значением до начала поставок. Определите, сколько процентов от первоначального живого веса стада составляет живой вес всей поставленной на рынок телятины, если ежемесячный прирост живого веса стада составляет 20%.

Задача 3. Высота правильного треугольника ABC со стороной $\sqrt{3}$ совпадает с медианой прямого угла прямоугольного треугольника DEF, углы которого составляют арифметическую прогрессию. При каком взаимном расположении треугольников ABC и DEF площадь их общей части окажется наименьшей? Найдите эту площадь.

Задача 4. Решите уравнение

$$4x \cdot \sqrt{1 - 4x^2} + 1 - 2\sqrt{2}x - 8x^2 = 0.$$

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$12a^2 \sin\left(x - \frac{3\pi + 1}{2}\right) - 6a\cos^2\left(\frac{7x}{a+6} - \frac{7}{12+2a}\right) -$$
$$- 3|1 - 2x| = 11a^2 - 11a + 6 + \operatorname{arctg}\left(x^2 + \frac{1}{4} - x\right)$$

имеет единственное решение.

Ответы. 1. 0. **2.** 30%. **3.** $\frac{15\sqrt{3}}{32}$. **4.** $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}\right\}$. **5.** $a = 1$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), экономический факультет (отделение экономики), 1.

Задача 1. Решите неравенство $\sqrt{5 - 4x - x^2} \geqslant -2x - 1$.

Задача 2. Про числа a и b известно, что $a + b = -12$, $a \cdot b = 2$. Вычислите значение выражения $\frac{1}{a^3} - \frac{|b|}{b^4}$.

Задача 3. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4 \cdot 49^x - 4 \cdot 7^{x+y\log_7 3} + 9^y = 9, \\ 49^x + 12 \cdot 3^{x\log_3 7+y} - 4 \cdot 9^y = 9. \end{cases}$$

Задача 4. На первом складе сахара было на 16 тонн больше, чем соли. За день с первого склада вывезли $\frac{1}{m}$ часть сахара и $\frac{1}{3}$ часть соли, причем сахара вывезли на 2 тонны больше, чем соли. На втором складе соли было на 4 тонны больше, чем сахара. За день со второго склада вывезли также $\frac{1}{m}$ часть сахара и $\frac{1}{5}$ часть соли, причем сахара вывезли на 3 тонны больше, чем соли. Сколько соли было на первом и втором складах, если известно, что m — целое число? При каких m задача имеет решение?

Задача 5. Площадь четырехугольника $PQRS$ равна 48. Известно, что $PQ = QR = 6$, $RS = SP$ и ровно три вершины P, Q и R лежат на окружности радиуса 5. Найдите длины сторон RS и SP.

Задача 6. Найдите все значения b, при которых уравнение

$$3 \cdot \sqrt[5]{x+2} - 16b^2 \cdot \sqrt[5]{32x+32} = \sqrt[10]{x^2+3x+2}$$

имеет единственное решение.

Задача 7. Найдите максимальный объем многогранника с пятью вершинами, который можно поместить в шар радиуса $2\sqrt{3}$.

Ответы. **1.** $[-2; 1]$. **2.** -207. **3.** $\{(\log_7 3; 2); (\log_7(5/3); -1)\}$. **4.** 24 и 80 тонн; $m = 4$. **5.** $4\sqrt{13}$. **6.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right] \cup \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}; +\infty\right)$. **7.** 36.

ВАРИАНТ 2003 (июль), экономический факультет (отделение экономики), 2.

Задача 1. Решите неравенство $\sqrt{8+2x-x^2} \leqslant 2x+1$.

Задача 2. Про числа x и y известно, что $x + y = 18$, $x \cdot y = 3$. Вычислите значение выражения $\frac{1}{|x| \cdot x^2} + \frac{1}{y^3}$.

Задача 3. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4^x - 19 \cdot 3^{x\log_3 2+y} + 4 \cdot 9^y = -10, \\ 4^x + 6 \cdot 2^{x+y\log_2 3} - 9^y = 5. \end{cases}$$

Задача 4. В первый день у Васи денег было на 30 рублей больше, чем у Пети. Вася внес на покупку книг $\dfrac{1}{n}$ часть своих денег, а Петя $1/2$ часть своих денег, при этом Петя внес на 20 рублей больше Васи. На второй день мальчики пошли в магазин за тетрадями. На этот раз у Васи было на 60 рублей больше, чем у Пети. На покупку тетрадей Вася снова внес $1/n$ часть своих денег, а Петя внес $1/4$ часть своих денег, при этом Вася внес на 40 рублей больше Пети. Сколько денег было у Пети в первый и второй день, если известно, что n — целое число? При каких n задача имеет решение?

Задача 5. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $AB = BC = 3\sqrt{3}$, $AD = DC = \sqrt{13}$, а вершина D лежит на окружности радиуса 2, вписанной в угол ABC, причем $\angle ABC = 60^\circ$.

Задача 6. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$5 \cdot \sqrt[3]{x+3} - 3a^2 \cdot \sqrt[3]{8x-16} = \sqrt[6]{x^2+x-6}$$

имеет ровно два различных решения.

Задача 7. Найдите минимальный радиус шара, в котором можно разместить пару одинаковых круглых цилиндров, радиусы оснований которых равны 3, а высоты 4.

Ответы. 1. $[1;4]$. **2.** 7. **3.** $\left\{\left(-\frac{1}{2};\log_9\frac{9}{2}\right);\left(\log_4\frac{4}{3};-\frac{1}{2}\right)\right\}$. **4.** 180 руб. и 240 руб.; $n=3$. **5.** $3\sqrt{3}$. **6.** $\left(-1;-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{2}{3}};1\right)$. **7.** 5.

ВАРИАНТ 2003 (июль), экономический факультет (отделение менеджмента), 1.

Задача 1. Решите уравнение $\sqrt{5-4x-x^2} = -2x-1$.

Задача 2. Про числа x и y известно, что $x+y=12$, $x\cdot y=6$. Вычислите значение выражения $\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}$.

Задача 3. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3\cdot 4^x + 2^{x+1}\cdot 3^y - 9^y = 0, \\ 2\cdot 4^x - 5\cdot 2^x\cdot 3^y + 9^y = -8. \end{cases}$$

Задача 4. На складе сахара было на 10 тонн больше, чем соли. За день со склада вывезли $1/m$ часть сахара и $1/3$ часть соли, причем сахара вывезли на 2 тонны больше, чем соли. Сколько соли было на складе, если известно, что m — целое число? При каких m задача имеет решение?

Задача 5. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $AB = BC = 8$, $AD = DC = 6$ и ровно три вершины A, B и C лежат на окружности радиуса 5.

Задача 6. Найдите все значения b, при которых уравнение

$$3 \cdot \sqrt[5]{x+4} - 7b^2 \cdot \sqrt[5]{32x+96} = \sqrt[10]{x^2+7x+12}$$

имеет единственное решение.

Ответы. **1.** $\{-2\}$. **2.** 7. **3.** $\left\{\left(\frac{1}{2}; \log_3 3\sqrt{2}\right)\right\}$. **4.** 6 тонн; $m = 4$. **5.** $\frac{336}{25}$. **6.** $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{7}}\right] \cup \left[-\sqrt{\frac{1}{7}}; \sqrt{\frac{1}{7}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{7}}; +\infty\right)$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), экономический факультет (отделение менеджмента), 2.

Задача 1. Решите уравнение $\sqrt{5+8x-4x^2} = 4x-1$.

Задача 2. Про числа a и b известно, что $a+b = -12$, $a \cdot b = 3$. Вычислите значение выражения $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$.

Задача 3. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 9^x - 3^{x+1} \cdot 2^y - 4^{y+1} = 0, \\ 9^x + 3^x \cdot 2^{y+1} - 2 \cdot 4^y = 11. \end{cases}$$

Задача 4. У Васи денег было на 90 рублей больше, чем у Пети. Вася внес на покупку книг $\frac{1}{n}$ часть своих денег, а Петя $\frac{1}{4}$ часть своих денег, при этом Вася внес на 40 рублей больше Пети. Сколько денег было у Пети, если известно, что n — целое число? При каких n задача имеет решение?

Задача 5. Про четырехугольник $PQRS$ известно, что его площадь равна 4, $PQ = QR = 3\sqrt{2}$, $RS = SP$, а вершина S лежит на окружности радиуса $\sqrt{2}$, вписанной в угол PQR. Найдите величину угла PQR.

Задача 6. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$7 \cdot \sqrt[3]{x-1} - 5a^2 \cdot \sqrt[3]{8x-32} = \sqrt[6]{x^2-5x+4}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответы. **1.** $\{1\}$. **2.** -60. **3.** $\left\{\left(\frac{3}{2}\log_3 2; -1/2\right)\right\}$. **4.** 120 руб.; $n = 3$. **5.** $2\arcsin(1/3)$ $(= \arccos(7/9))$. **6.** $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), экономический факультет (вечернее отделение), 1.

Задача 1. Решите неравенство $\sqrt{8+2x-x^2} \leqslant 2x+1$.

Задача 2. Про числа a и b известно, что $a+b=-18$, $a \cdot b = 3$. Вычислите значение выражения

$$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{|b| \cdot b^2}.$$

Задача 3. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 9^x - 3^{x+1} \cdot 2^y - 4^{y+1} = 0, \\ 9^x + 3^x \cdot 2^{y+1} - 2 \cdot 4^y = 11. \end{cases}$$

Задача 4. Под овес был выделен участок на 13 гектаров больший, чем участок под пшеницу. За день засеяли $\frac{1}{n}$ часть участка овса и $\frac{1}{3}$ часть участка пшеницы, причем овса посеяли на 3 гектара больше, чем пшеницы. Какова площадь участка, выделенного под пшеницу, если известно, что n — целое число? При каких n задача имеет решение?

Задача 5. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $AB = BC = 3\sqrt{3}$, $AD = DC = \sqrt{13}$, а вершина D лежит на окружности радиуса 2, вписанной в угол ABC, причем $\angle ABC = 60°$.

Задача 6. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$5 \cdot \sqrt[3]{x+3} - 3a^2 \cdot \sqrt[3]{8x-16} = \sqrt[6]{x^2+x-6}$$

имеет ровно два различных решения.

Задача 7. Найдите минимальный радиус шара, в котором можно разместить пару одинаковых круглых цилиндров, радиусы оснований которых равны 3, а высоты 4.

Ответы. **1.** $[1;4]$. **2.** -210. **3.** $\left\{\left(\frac{3}{2}\log_3 2; -\frac{1}{2}\right)\right\}$ **4.** 3 га; $n=4$. **5.** $3\sqrt{3}$. **6.** $\left(-1; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}; 1\right)$. **7.** 5.

ВАРИАНТ 2003 (июль), экономический факультет (вечернее отделение), 2.

Задача 1. Решите неравенство $\sqrt{5-4x-x^2} \geqslant -2x-1$.

Задача 2. Про числа x и y известно, что $x + y = 12$, $x \cdot y = 2$. Вычислите значение выражения

$$\frac{1}{x^3} + \frac{|y|}{y^4}.$$

Задача 3. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 4^x + 2^{x+1} \cdot 3^y - 9^y = 0, \\ 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x \cdot 3^y + 9^y = -8. \end{cases}$$

Задача 4. Магазин получил мужской обуви на 22 миллиона рублей больше, чем женской обуви. За неделю магазин продал $\frac{1}{m}$ часть мужской обуви и $\frac{1}{4}$ часть женской, причем женской обуви продали на 4 миллиона рублей меньше, чем мужской. На какую сумму магазин получил женской обуви, если известно, что m — целое число? При каких m задача имеет решение?

Задача 5. Площадь четырехугольника $PQRS$ равна 48. Известно, что $PQ = QR = 6$, $RS = SP$ и ровно три вершины P, Q и R лежат на окружности радиуса 5. Найдите длины сторон RS и SP.

Задача 6. Найдите все значения b, при которых уравнение

$$3 \cdot \sqrt[5]{x+2} - 16b^2 \cdot \sqrt[5]{32x+32} = \sqrt[10]{x^2+3x+2}$$

имеет единственное решение.

Задача 7. Найдите максимальный объем многогранника с пятью вершинами, который можно поместить в шар радиуса $2\sqrt{3}$.

Ответы. **1.** $[-2; 1]$. **2.** 207. **3.** $\left(\frac{1}{2}; \log_3 3\sqrt{2}\right)$. **4.** 8 млн. руб.; $m = 5$. **5.** $4\sqrt{13}$. **6.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right] \cup \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}; +\infty\right)$. **7.** 36.

ВАРИАНТ 2003 (июль), психологический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение $\log_{3x+3} 5 = 2$.

Задача 2. Решите уравнение $\sin 3x \cdot \sin x = -1/8$.

Задача 3. Решите неравенство $|3x+1| + \sqrt{3x+4} \leqslant 3$.

Задача 4. В окружность радиуса $\sqrt{7}$ вписана трапеция с меньшим основанием 4. Через точку на этой окружности, касательная в которой параллельна одной из боковых сторон трапеции, проведена параллельная основаниям трапеции хорда окружности длины 5. Найдите длину диагонали трапеции и площадь трапеции.

Задача 5. При каких значениях параметра a уравнение

$$2|x-9a|-2a^2+35+x=0$$

не имеет решений? При каких (остальных) значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30; 63]$?

Ответы. **1.** $x=(\sqrt{5}-3)/3$. **2.** $(\pm\arccos((1-\sqrt{11})/4)+2\pi n)/2$, $n\in\mathbb{Z}$. **3.** $x=\{-4/3\}\cup[-1;0]$. **4.** $d=5$, $S_{ABCD}=975\sqrt{3}/196$. **5.** а) $a\in(-5/2;7)$, б) $a\in\left[(9-\sqrt{211})/2;-5/2\right]\cup\{7\}$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), психологический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение $\log_{2-2x}3=2$.

Задача 2. Решите уравнение $\cos 3x\cdot\cos x=1/8$.

Задача 3. Решите неравенство $|2x-5|+\sqrt{2x+1}\leqslant 6$.

Задача 4. В окружность диаметра $3\sqrt{3}$ вписана трапеция с большим основанием 3. Через точку на этой окружности, касательная в которой параллельна одной из боковых сторон трапеции, проведена параллельная основаниям трапеции хорда окружности длины 5. Найдите длину диагонали трапеции и площадь трапеции.

Задача 5. При каких значениях параметра a уравнение

$$2|x-2a|-a^2+15+x=0$$

не имеет решений? При каких (остальных) значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-9; 10]$?

Ответы. **1.** $x=(2-\sqrt{3})/2$. **2.** $(\pm\arccos((-1+\sqrt{11})/4)+2\pi n)/2$, $n\in\mathbb{Z}$. **3.** $x=\{-1/2\}\cup[-0;4]$. **4.** $d=5$, $S_{ABCD}=50\sqrt{2}/9$. **5.** а) $a\in(-3;5)$, б) $a\in[2-2\sqrt{7};-3]\cup\{5\}$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), психологический факультет, 3.

Задача 1. Решите уравнение $\log_{2x-4}2=2$.

Задача 2. Решите уравнение $\sin 6x\cdot\sin 2x=-1/16$.

Задача 3. Решите неравенство $|4x-7|+\sqrt{4x+3}\leqslant 10$.

Задача 4. В окружность радиуса $\sqrt{13}$ вписана трапеция с меньшим основанием 5. Через точку на этой окружности, касательная в которой параллельна одной из боковых сторон трапеции, проведена параллельная основаниям трапеции хорда окружности длины 7. Найдите длину диагонали трапеции и площадь трапеции.

Задача 5. При каких значениях параметра a уравнение

$$2|x-8a|-2a^2+24+x=0$$

не имеет решений? При каких (остальных) значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-20; 48]$?

Ответы. 1. $x=2+1/\sqrt{2}$. **2.** $(\pm\arccos((1-\sqrt{10})/4)+2\pi n)/4$, $n\in\mathbb{Z}$. **3.** $x=\{-3/4\}\cup[-1/2; 13/4]$. **4.** $d=7$, $S_{ABCD}=2156\sqrt{3}/169$. **5.** а) $a\in(-2; 6)$, б) $a\in[4-\sqrt{38}; -2]\cup\{6\}$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), психологический факультет, 4.

Задача 1. Решите уравнение $\log_{5-3x}5=2$.

Задача 2. Решите уравнение $\cos 6x\cdot\cos 2x=1/16$.

Задача 3. Решите неравенство $|5x-9|+\sqrt{5x+6}\leqslant 15$.

Задача 4. В окружность диаметра $\sqrt{65}$ вписана трапеция с большим основанием 7. Через точку на этой окружности, касательная в которой параллельна одной из боковых сторон трапеции, проведена параллельная основаниям трапеции хорда окружности длины 8. Найдите длину диагонали трапеции и площадь трапеции.

Задача 5. При каких значениях параметра a уравнение

$$2|x-3a|-2a^2+35+x=0$$

не имеет решений? При каких (остальных) значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-14; 15]$?

Ответы. 1. $x=(5-\sqrt{5})/3$. **2.** $(\pm\arccos((\sqrt{5}-1)/4)+2\pi n)/4$, $n\in\mathbb{Z}$. **3.** $x=\{-6/5\}\cup[-1; 19/5]$. **4.** $d=8$, $S_{ABCD}=768/25$. **5.** а) $a\in(-7/2; 5)$, б) $a\in[(3-\sqrt{107})/2; -7/2]\cup\{5\}$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), ИСАА, 1.

Задача 1. Числа x, y изменяются в следующих пределах: $3 \leqslant x \leqslant 4$ и $1 \leqslant y \leqslant 2$. Найдите в каких пределах изменяется величина выражения $A = 4^{x-2y-1} - 4y + 4x - 4$.

Задача 2. Решите уравнение $(|x|-5)^2 - |5-x| = 30$.

Задача 3. В правильный треугольник ABC со стороной a вписана окружность. Эта окружность касается внешним образом трех других окружностей того же радиуса в точках касания сторон треугольника. Центры внешних окружностей соответственно O_1, O_2, O_3. Найдите площадь шестиугольника, получающегося при пересечении треугольников ABC и $O_1O_2O_3$.

Задача 4. Найдите корни уравнения

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2(\sqrt{2}+1)\operatorname{ctg} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

Задача 5. Решите неравенство

$$\left((1/2)^{\sqrt{\log_{4x^2}(2x^2)\cdot\log_{8x^4}(4x^4)-1}} - 1\right) \times$$
$$\times \sqrt{(x^2+8x+15)(256x^2-24x-1)} \geqslant 0.$$

Задача 6. Функция $y(x) = x^2 + 2(c-d)x + 3c - d$ такова, что $y(1)\cdot y(-1) \leqslant 0$ и $|c-d| \geqslant 1$. Найдите величины c и d, при которых длина промежутка, представляющего собой множество значений функции $f(x) = |y(x)|$ на отрезке $[-1; 1]$, наименьшая; укажите это множество значений.

Ответы. **1.** $A \in [1/16; 12]$. **2.** $\left\{11; \frac{-11-\sqrt{161}}{2}\right\}$. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$. **4.** $\left\{\frac{\pi}{2}; \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$. **5.** $(-\infty; -5] \cup \left[-3; -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right] \cup \left\{-\frac{1}{32}\right\} \cup \left\{\frac{1}{8}\right\} \cup \left[\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; +\infty\right)$. **6.** Отрезок $[0; 2]$ при $\begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} c = -1 \\ d = -2. \end{cases}$

ВАРИАНТ 2003 (июль), ИСАА, 2.

Задача 1. Числа c, d изменяются в следующих пределах: $1 \leqslant c \leqslant 3$ и $5 \leqslant d \leqslant 6$. Найдите в каких пределах изменяется величина выражения $A = 2^{4c-d-3} - 2d + 2c + 10$.

Задача 2. Решите уравнение $(2-|x|)^2+|x-2|=12$.

Задача 3. В правильный треугольник DEF вписана окружность радиуса r. Эта окружность касается внешним образом трех других окружностей того же радиуса в точках касания сторон треугольника. Центры внешних окружностей соответственно O_1, O_2, O_3. Найдите площадь шестиугольника, получающегося при пересечении треугольников DEF и $O_1O_2O_3$.

Задача 4. Найдите корни уравнения

$$6(2+\sqrt{3})\operatorname{ctg}x-\sqrt{3}=\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

принадлежащие отрезку $[-\pi;0]$.

Задача 5. Решите неравенство

$$\left((1/7)^{\sqrt{\log_{9x^2}(3x^2)\cdot\log_{27^4}(9x^4)-1}}-1\right)\times$$
$$\times\sqrt{(x^2-7x+10)(243x^2+18x-1)}\geqslant 0.$$

Задача 6. Функция $y(x)=x^2+2(a+b)x+a-2b$ такова, что $y(1)\cdot y(-1)\leqslant 0$ и $|a+b|\geqslant 1$. Найдите величины a и b, при которых длина промежутка, представляющего собой множество значений функции $f(x)=|y(x)|$ на отрезке $[-1;1]$, наименьшая; укажите это множество значений.

Ответы. **1.** $A\in[1/32;22]$. **2.** $\left\{5;\frac{-3-\sqrt{33}}{2}\right\}$. **3.** $2r^2\sqrt{3}$. **4.** $\left\{-\frac{\pi}{2};\ -\pi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. **5.** $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right]\cup\left\{-\frac{1}{9}\right\}\cup\left\{\frac{1}{27}\right\}\cup\left[\frac{1}{\sqrt[3]{9}};2\right)[5;+\infty)$. **6.** Отрезок $[0;2]$ при $\begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases}$ или $\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

ВАРИАНТ 2003 (июль), социологический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x+7}$.

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{0,1}(6+x)\leqslant\log_{0,1}x.$$

Задача 3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Радиус окружности равен 2, сторона AB равна 3. Диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Найдите CD.

Задача 4. В городе N на должность мэра на выборах баллотировались 3 кандидата: Акулов, Баранов и Воробьев. В начале предвыборной кампании предпочтения избирателей распределялись как $1:2:1$. По окончании предвыборной гонки 40% избирателей города N отказались участвовать в выборах, у остальных же предпочтения не изменились. Сколько процентов сторонников каждого кандидата отказались от голосования, если по окончании предвыборной гонки соотношение голосов стало $3:3:3{,}6$?

Задача 5. Двое рабочих изготовили 316 деталей, причем второй сделал на 4 детали меньше первого. Известно, что первый рабочий работал на 3 дня дольше второго, при этом в день изготавливая на 2 детали меньше. Сколько деталей в день делал каждый рабочий?

Задача 6. Определите все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения $x^3+(a^2-9a)x^2+8ax-64=0$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

Ответы. **1.** 3. **2.** $(0;3]$. **3.** $\sqrt{7}$. **4.** 25%, $62,5\%$, 10%. **5.** Первый — 10, второй — 12. **6.** $a=7$; $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=8$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), социологический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение $\sqrt{2x+1}-\sqrt{5-x}=\sqrt{x}$.

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{1}{2}\log_2(12-x)\leqslant\log_2 x.$$

Задача 3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Радиус окружности равен 4, сторона AB равна 6. Диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Найдите CD.

Задача 4. В городе N на должность мэра на выборах баллотировались 3 кандидата: Акулов, Баранов и Воробьев. В начале предвыборной кампании предпочтения избирателей распределялись как $1:2:3$. По окончании предвыборной гонки 50% избирателей города N отказались участвовать в выборах, у остальных же предпочтения не изменились. Сколько процентов сторонников каждого кандидата отказались от голосования, если по окончании предвыборной гонки соотношение голосов стало $1:2:1,5$?

Задача 5. Двое рабочих изготовили 294 деталей, причем второй сделал на 6 деталей меньше первого. Известно, что второй рабочий работал на 2 дня меньше первого, при этом в день изготавливая на 3 детали больше. Сколько деталей в день делал каждый рабочий?

Задача 6. Определите все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 15a)x^2 + 12ax - 216 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

Ответы. 1. 4. **2.** $[3; 12)$. **3.** $2\sqrt{7}$. **4.** $33\frac{1}{3}\%$, $33\frac{1}{3}\%$, $66\frac{2}{3}\%$. **5.** Первый — 15, второй — 18. **6.** $a = 13$; $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 18$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), факультет государственного управления, 1.

Задача 1. Автозаправочные станции E и F расположены на расстоянии 3 км одна от другой. Где наиболее выгодно разместить бензосклад, если на АЗС E ежедневно поставляется 8 тонн бензина, а на АЗС F — 4 тонны?

Задача 2. Решите неравенство $|2x + 8| \geqslant 8 - |1 - x|$.

Задача 3. Три предприятия A, B и C на паритетных (равных) началах прокладывают необходимую им шоссейную дорогу длиной 16 км. Предприятие A взяло на себя прокладку 10 км дороги, предприятие B — остальные 6 км, а предприятие C внесло свою долю деньгами, уплатив 16 миллионов условных денежных единиц. Как эти деньги должны быть распределены между предприятиями A и B?

Задача 4. В прямоугольном треугольнике KLM проведен отрезок MD, соединяющий вершину прямого угла с точкой D на гипотенузе KL так, что длины отрезков DL, DM и DK различны и образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{2}$, причем $DL = 1$. Найдите величину угла KMD.

Задача 5. Для каждой пары чисел a и b найдите все решения неравенства $a \cdot x^2 + b \geqslant 0$.

Задача 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$$

Задача 7. Для того чтобы успеть на последний электропоезд, семье из четырех человек нужно перейти по пешеходному мосту быстрее, чем за 32 минуты. Одновременно по мосту могут идти не более двух человек, причем ввиду темного времени непременно с фонариком. Если мост проходят двое, то со скоростью того, кто идет медленнее. Успеют ли на последний поезд все члены семьи, если известно, что в одиночку Анна может перейти мост за 2 минуты, Василий — за 4 минуты, Игорек — за 10 минут, Марья Ивановна — за 16 минут, а фонарик только один.

Ответы. **1.** В пункте E. **2.** $(-\infty; -5] \cup [-1; +\infty)$. **3.** 14 миллионов у. е. для предприятия A и 2 миллиона у. е. — для B. **4.** $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **5.** Нет решений при $a > 0$, $b \geqslant 0$; $(-\infty; +\infty)$ при $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$; $(-\infty; -\sqrt{-a/b}] \cup \cup [\sqrt{-a/b}; +\infty)$ при $a > 0$, $b < 0$; $[-\sqrt{-a/b}; \sqrt{-a/b}]$ при $a \leqslant 0$, $b > 0$. **6.** $\{(2; 2; -2)\}$. **7.** Успеют.

ВАРИАНТ 2003 (июль), факультет государственного управления, 2.

Задача 1. Государственные предприятия A и B, расположенные на расстоянии 100 км одно от другого, выпускают одинаковый продукт. В каком месте наиболее выгодно разместить склад готовой продукции, если предприятие A выпускает в день 60 единиц продукта, предприятие B — 120 единиц?

Задача 2. Решите неравенство $|x + 3| \leqslant 13 - |4 - 2x|$.

Задача 3. Три предприятия D, E и F строят сооружение на равных долевых началах. Для строительства потребовалось 110 каменных блоков. Предприятие D представило 70 блоков, предприятие E — остальные 40, а предприятие F решило всю свою долю оплатить деньгами, выделив для этого 110 тысяч условных денежных единиц. Как разделить эти деньги между предприятиями D и E?

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC проведен отрезок CK, соединяющий вершину прямого угла с точкой K на гипотенузе AB так, что длины отрезков BK, CK и AK различны и образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, причем $CK = 2$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = 3$.

Задача 5. Для каждой пары чисел a и b найдите все решения неравенства $a \cdot x^2 + b \geqslant 0$.

Задача 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + z = 3, \\ z^2 + 2xy = -9. \end{cases}$$

Задача 7. Для того чтобы успеть на последний электропоезд, семье из четырех человек нужно перейти по пешеходному мосту быстрее, чем за 16 минут. Одновременно по мосту могут идти не более двух человек, причем ввиду темного времени непременно с фонариком. Если мост проходят двое, то со скоростью того, кто идет медленнее. Успеют ли на последний поезд все члены семьи, если известно, что в одиночку Михаил может перейти мост за 1 минуту, Надежда — за 2 минуты, Машенька — за 5 минут, Иван Степанович — за 8 минут, а фонарик только один.

Ответы. **1.** В пункте B. **2.** $[-4; 14/3]$. **3.** 100 тысяч у. е. для предприятия D и 10 тысяч у. е. — для E. **4.** $9\sqrt{5}/10$. **5.** Нет решений при $a \leqslant 0$, $b < 0$; $(-\infty; +\infty)$ при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$; $(-\infty; -\sqrt{-b/a}] \cup [\sqrt{-b/a}; +\infty)$ при $a > 0$, $b < 0$; $[-\sqrt{-b/a}; \sqrt{-b/a}]$ при $a < 0$, $b \geqslant 0$. **6.** $\{(3; -3; -3)\}$. **7.** Успеют.

ВАРИАНТ 2003 (апрель), высшая школа бизнеса, 1.

Задача 1. Решите уравнение $22x^2 + 10x = \sqrt{1276x^3 + 364x^2}$.

Задача 2. После того как 1500 новых вкладчиков открыли в банке счета на общую сумму в 7 млн. 800 тыс. руб., средний размер вклада, составлявший 6 тыс. руб., уменьшился на 10%. Определите число старых вкладчиков банка.

Задача 3. Решите неравенство

$$|\sqrt{x+4} - 2| > \frac{6}{\sqrt{x+4} - 3}.$$

Задача 4. Найдите координаты центра и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами $K(-5; -1)$, $L(-2; 0)$, $M(2; -2)$.

Задача 5. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{4}{x}} \frac{1}{2} - \log_2(2x) \cdot \log_{\frac{8}{x}} \frac{1}{2}}.$$

Задача 6. В трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$) биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M. Найдите длину отрезка AM, если известно, что $BM = 8$, $BC + AD = 17$, а треугольники ACM и ADM имеют одинаковую площадь.

Задача 7. Решите уравнение

$$(x-1)^6(\sin 4x + \sin 4)^{\frac{1}{6}} + (x+1)^6(\sin 2 - \sin 2x)^{\frac{1}{6}} = 0.$$

Задача 8. Найдите все значения параметра p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| + |y| - p) \cdot (|x| + |y| + |x+y| - 2p) = 0, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{p^2} \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

Ответы. **1.** $\{0; 2\}$. **2.** 500. **3.** $[-4; 5) \cup (21; +\infty)$. **4.** Центр в точке $(-2; -5)$, $R = 5$. **5.** $(4; 8) \cup \{2\}$. **6.** $AM = 15$. **7.** $\left\{-1; \frac{\pi}{2} - 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right\}$. **8.** $p \in \{\sqrt[4]{2}\} \cup \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1\right]$.

ВАРИАНТ 2003 (апрель), высшая школа бизнеса, 2.

Задача 1. Решите уравнение $21x^2 + 18x = \sqrt{1953x^3 + 702x^2}$.

Задача 2. После того как 1300 новых вкладчиков открыли в банке счета на общую сумму в 27 млн. руб., средний размер вклада, составлявший 15 тыс. руб., увеличился на 20%. Определите число старых вкладчиков банка.

Задача 3. Решите неравенство

$$|\sqrt{x+9} - 2| > \frac{10}{\sqrt{x+9} - 5}.$$

Задача 4. Найдите координаты центра и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(-8; 0)$, $B(-5; 1)$, $C(-1; -1)$.

Задача 5. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{27}{x}} \frac{1}{3} - \log_3 x \cdot \log_{\frac{81}{x}} \frac{1}{3}}.$$

Задача 6. В трапеции $KLMN$ $(KN \| LM)$ биссектриса угла LKN пересекает сторону MN в точке P. Найдите длину отрезка LP, если известно, что $KP = 5$, $KN + LM = 13$, а треугольники KMP и KNP имеют одинаковую площадь.

Задача 7. Решите уравнение

$$(x+1)^4(\sin 3 - \sin 3x)^{\frac{1}{4}} + (x-1)^4(\sin 6 + \sin 6x)^{\frac{1}{4}} = 0.$$

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(|x| + |y| + |x-y| - \frac{2}{a}\right) \cdot \left(|x| + |y| - \frac{1}{a}\right) = 0, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

Ответы. **1.** $\{0; 3\}$. **2.** 1200. **3.** $[-9; 16) \cup (40; +\infty)$. **4.** Центр в точке $(-5; -4)$, $R = 5$. **5.** $(27; 81) \cup \{9\}$. **6.** $LP = 12$. **7.** $\left\{-1; \frac{\pi}{3} - 1 + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}\right\}$. **8.** $a \in \left\{1/\sqrt[4]{2}\right\} \cup \left[1; \sqrt[4]{2}\right)$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), высшая школа бизнеса, 1.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{(x+5)(x-3)}}{x+5} \leqslant 0.$$

Задача 2. В банке общая сумма кредитов, выданных населению, составляет 25% от суммы кредитов, выданных предприятиям. Какой процент от общего объема кредитования в этом банке приходится на долю предприятий?

Задача 3. Решите уравнение $2 \operatorname{ctg} x \cdot |\sin x| + 1 = 0$.

Задача 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5 \log_{32}(x+y) + \log_{\frac{1}{2}}(3y-8) = 0, \\ x^2 + 2x + y^2 + y = 12. \end{cases}$$

Задача 5. Найдите стороны параллелограмма $ABCD$, если известны координаты двух его противоположных вершин $A(-3; -6)$, $C(5; 12)$ и точки $M(1; 9)$, являющейся серединой стороны BC.

Задача 6. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $2x^2 = 2y^2 + 3xy + 7$.

Задача 7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) угол при вершине B равен $80°$, а точка M внутри треугольника расположена так, что $\angle MAC = 10°$. Найдите величину угла BMC.

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $25x^5 + 25(a-1)x^3 - 4(a-7)x = 0$ имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию.

Ответы. **1.** $(-\infty; -5) \cup \{3\}$. **2.** 80%. **3.** $\{2\pi/3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$. **4.** $\{(-2; 3)\}$. **5.** $AB = 12$, $BC = 10$. **6.** $\{(3; 1); (-3; -1)\}$. **7.** $70°$. **8.** $a = -2$.

ВАРИАНТ 2003 (июль), высшая школа бизнеса, 2.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{(x+3)(x-5)}}{x+3} \leqslant 0.$$

Задача 2. В крае численность городского населения составляет 150% от численности сельских жителей. Какой процент населения края проживает в городах?

Задача 3. Решите уравнение $1 + 2\operatorname{tg} x \cdot |\cos x| = 0$.

Задача 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3y = 11, \\ \log_{\frac{1}{3}}(3y - 5) + 3\log_{27}(x + y) = 0. \end{cases}$$

Задача 5. Найдите стороны параллелограмма $ABCD$, если известны координаты двух его противоположных вершин $A(-2; 1)$, $C(6; -1)$ и точки $M(2; -2)$, являющейся серединой стороны AB.

Задача 6. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $2x^2 + 5 = 3y^2 + 5xy$.

Задача 7. В равнобедренном треугольнике KLM углы при основании KM равны $50°$, а точка O внутри треугольника расположена так, что $\angle OKL = 20°$, а $\angle OML = 40°$. Найдите величину угла KOL.

Задача 8. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $25x^5 - 25(p-1)x^3 + 4(p+5)x = 0$ имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию.

Ответы. **1.** $(-\infty; -3) \cup \{5\}$. **2.** 60%. **3.** $\{5\pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$. **4.** $\{(-1; 2)\}$. **5.** $AB = 10$, $BC = 4$. **6.** $\{(2; 1); (-2; -1)\}$. **7.** $150°$. **8.** $p = 4$.

§2.2. Варианты 2004 года

ВАРИАНТ 2004 (март), механико-математический факультет, 1.

Задача 1. Найдите сумму тангенсов всех таких $x \in (-\pi; \pi)$, что

$$\sin 2x + 5\cos 2x = 3.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$3^{\log_x (3x^2+2x-1)} \leqslant (x^2 + x)^{\log_x 9}.$$

Задача 3. Найдите все возможные значения суммы убывающей арифметической прогрессии

$$a_1 = \frac{6m - m^2 - 9}{6m - m^2}; \quad a_2 = \frac{6m - m^2 - 12}{6m - m^2}; \quad \ldots; \quad a_n = \frac{(-10)}{6m - m^2},$$

где m — некоторое целое число.

Задача 4. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ диагонали KM и LN перпендикулярны соответственно сторонам MN и KL, а длина стороны KN равна $4\sqrt{3}$. На стороне KN расположена точка A так, что $\angle LAK = \angle MAN$. Известно, что $\angle MKN - \angle KNL = 15^\circ$. Найдите длину ломаной LAM и площадь четырехугольника $KLMN$, если $LA : AM = 1 : \sqrt{3}$.

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\operatorname{arctg}\big((3a-1)\sin^2 x - (3a^3 - a^2 + 3a - 1)\sin x + \\ + \operatorname{tg}(ax - a\pi)\big) - ax + a\pi = 0$$

имеет ровно три решения.

Задача 6. Дана сфера радиуса 1 с центром в точке O. Из точки A, лежащей вне сферы, проведены четыре луча. Первый луч пересекает поверхность сферы последовательно в точках B_1 и C_1, второй — в точках B_2 и C_2, третий — в точках B_3 и C_3, четвертый — в точках B_4 и C_4. Прямые B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в точке E, прямые B_3B_4 и C_3C_4 — в точке F. Найдите объем пирамиды $OAEF$, если $AO = 2$, $EO = FO = 3$, а угол между гранями AOE и AOF равен 30°.

Ответы. 1. $1/2$. **2.** $[\sqrt{2}-1; 1) \cup (1; \infty)$. **3.** $-21/5, -11/4$. **4.** $\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)$, $3(3+\sqrt{3})$. **5.** $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. **6.** $\frac{35}{24}$.

ВАРИАНТ 2004 (март), механико-математический факультет, 2.

Задача 1. Найдите сумму тангенсов всех таких $x \in (-\pi; \pi)$, что

$$4\sin 2x + 9\cos 2x = 3.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$5^{\log_{x+1}(3x^2+8x+4)} \leqslant (x^2+3x+2)^{\log_{x+1} 25}.$$

Задача 3. Найдите все возможные значения суммы возрастающей арифметической прогрессии

$$a_1 = \frac{5k-k^2-1}{5k-k^2+6}; \quad a_2 = \frac{5k-k^2+2}{5k-k^2+6}; \quad \ldots; \quad a_n = \frac{14}{5k-k^2+6},$$

где k — некоторое целое число.

Задача 4. В выпуклом четырехугольнике $PQRS$ диагонали PR и QS перпендикулярны соответственно сторонам RS и PQ, а длина стороны PS равна 4. На стороне PS расположена точка K так, что $\angle QKP = \angle SKR$. Известно, что $\angle RPS - \angle PSQ = 45^\circ$. Найдите длину ломаной QKR и площадь четырехугольника $PQRS$, если $QK : RK = \sqrt{3} : 3$.

Задача 5. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$\operatorname{arctg}\left((b-5)\sin^2 x - (b^3-5b^2+b-5)\sin x - \operatorname{tg}\frac{x-2\pi}{b}\right) + \frac{x-2\pi}{b} = 0$$

имеет ровно пять решений.

Задача 6. Дана сфера радиуса 2 с центром в точке O. Из точки K, лежащей вне сферы, проведены четыре луча. Первый луч пересекает поверхность сферы последовательно в точках L_1 и M_1, второй — в точках L_2 и M_2, третий — в точках L_3 и M_3, четвертый — в точках L_4 и M_4. Прямые L_1L_2 и M_1M_2 пересекаются в точке A, прямые L_3L_4 и M_3M_4 — в точке B. Найдите объем пирамиды $KOAB$, если $KO = 3$, $AO = BO = 4$, а угол между гранями KOA и KOB равен 60°.

Ответы. **1.** $\frac{4}{3}$. **2.** $\left(-\frac{2}{3}; \sqrt{2}-2\right]$. **3.** $\frac{19}{6}, \frac{13}{2}$. **4.** $2\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}$. **5.** $[-6;-4) \cup (4;5) \cup (5;6]$. **6.** $\frac{32\sqrt{3}}{9}$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), механико-математический факультет, 1.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{\log_4(2-x)-\log_6(2-x)}{\log_6 x-\log_9 x}\leqslant \log_4 9.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{(x^2+x+1)^2-2|x^3+x^2+x|-3x^2}{10x^2-17x-6}\geqslant 0.$$

Задача 3. Выпуклый многогранник $ABCDFE$ имеет пять граней: CDF, ABE, $BCFE$, $ADFE$ и $ABCD$. Ребро AB параллельно ребру CD. Точки K и L расположены соответственно на ребрах AD и BC так, что отрезок KL делит площадь грани $ABCD$ пополам. Точка M является серединой ребра EF и вершиной пирамиды $MABCD$, объем которой равен 6. Найдите объем пирамиды $EKLF$, если известно, что объем многогранника $ABCDFE$ равен 19.

Задача 4. Решите уравнение

$$\sqrt{-3\sin 2x}=-2\sin 2x-\sin x+\cos x-1.$$

Задача 5. Дорога проходит последовательно через пункты A, B, C и D. Расстояние от A до B равно 24 км. Из A в D выехал с постоянной скоростью автомобиль. Одновременно с ним из B в D отправились с постоянными скоростями велосипедист и мотоциклист. Когда автомобиль догнал велосипедиста, мотоциклист обгонял их на 6 км. В пункте C автомобиль догнал мотоциклиста и, доехав до D, сразу поехал обратно в A, встретившись с велосипедистом во второй раз в пункте C. Найдите расстояние между B и C, если известно, что время от начала движения до момента повторной встречи автомобиля и велосипедиста в два раза больше, чем время от начала движения до того момента, когда автомобиль впервые догнал мотоциклиста.

Задача 6. В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H, а медианы в точке O. Биссектриса угла A проходит через середину отрезка OH. Найдите площадь треугольника ABC, если $BC=2$, а разность углов B и C равна 30°.

Ответы. 1. $(0;1)\cup(1;2)$. **2.** $(-\infty;-2-\sqrt{3}]\cup(-0,3;-2+\sqrt{3}]\cup\{1\}\cup(2;\infty)$. **3.** 13. **4.** $\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k,\ n,k\in\mathbb{Z}$. **5.** 16 км. **6.** $\frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{15}}$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), механико-математический факультет, 2.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{\log_4(x+1)-\lg(x+1)}{\lg(1-x)-\log_{25}(1-x)} \leqslant \log_4 25.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{(x^2+3x+4)^2-2|x^3+3x^2+4x|-35x^2}{2x^2-5x-3} \geqslant 0.$$

Задача 3. Выпуклый многогранник $KLMNFE$ имеет пять граней: KLE, MNF, $KNFE$, $LMFE$ и $KLMN$. Точки A и B расположены соответственно на ребрах KN и LM так, что отрезок AB делит площадь грани $KLMN$ пополам. Точка D является серединой ребра EF и вершиной пирамиды $DKLMN$, объем которой равен 5. Найдите объем многогранника $KLMNFE$, если известно, что объем пирамиды $EFAB$ равен 8.

Задача 4. Решите уравнение

$$\sqrt{3\sin 2x} = 2\sin 2x + \sin x + \cos x - 1.$$

Задача 5. Дорога проходит последовательно через пункты A, B, C и D. Расстояние от B до C равно 12 км. Из A в D выехал с постоянной скоростью мотоциклист. Одновременно с ним из B в D отправились с постоянными скоростями пешеход и велосипедист. Когда мотоциклист догнал пешехода, велосипедист обгонял их на 6 км. В пункте C мотоциклист догнал велосипедиста и, доехав до D, сразу поехал обратно в A, встретившись с пешеходом во второй раз в пункте C. Найдите расстояние между A и B, если известно, что время от начала движения до момента повторной встречи мотоциклиста и пешехода в 4 раза больше, чем время от начала движения до того момента, когда мотоциклист впервые догнал велосипедиста.

Задача 6. В остроугольном треугольнике KLN высоты пересекаются в точке H, а медианы в точке O. Биссектриса угла K пересекает отрезок OH в такой точке M, что $OM : MH = 3 : 1$. Найдите площадь треугольника KLN, если $LN = 4$, а разность углов L и N равна $30°$.

Ответы. **1.** $(-1;0)\cup(0;1)$. **2.** $(-\infty;-5-\sqrt{21}]\cup(-0,5;-5+\sqrt{21}]\cup\{2\}\cup$ $\cup(3;\infty)$. **3.** 13. **4.** $-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, -\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$. **5.** 18 км. **6.** $\frac{4(5\sqrt{3}+1)}{3\sqrt{11}}$.

ВАРИАНТ 2004, механико-математический факультет, задачи устного экзамена.

Задача 1. Найдите наименьшее значение выражения

$$(x-y)^2+3(y-z)^2-5(z-x)^2,$$

если $x, y, z \in [-1; 1]$.

Задача 2. В треугольнике ABC биссектрисы пересекаются в точке O. Прямая AO пересекается с окружностью, описанной около треугольника OBC, в точках O и M. Найдите длину отрезка OM, если $BC = 2$, а угол A равен 30°.

Задача 3. Отрезок AB является диаметром окружности. Вторая окружность с центром в точке B имеет радиус, равный 2, и пересекается с первой окружностью в точках C и D. Хорда CE второй окружности является частью касательной к первой окружности и имеет длину $CE = 3$. Найдите радиус первой окружности.

Задача 4. Высота треугольной пирамиды $SABC$, опущенная из вершины S, проходит через точку пересечения высот треугольника ABC. Найдите отношение площадей граней ABS и ACS, если $SC = 6-\sqrt{2}$, $SB = 6+\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{19}$.

Ответы. 1. -17. **2.** $2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. **3.** . $\frac{4}{\sqrt{7}}$. **4.** $\frac{19+6\sqrt{2}}{17}$.

ВАРИАНТ 2004 (апрель), факультет вычислительной математики и кибернетики, 1.

Задача 1. Четыре числа a_1, a_2, a_3 и a_4 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если к ним прибавить $6, 7, 6$ и 1 соответственно, то получатся числа, образующие в том же порядке арифметическую прогрессию. Найдите числа a_1, a_2, a_3 и a_4.

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{1}{x^2-5x+7} \leqslant 5x-x^2-5.$$

Задача 3. Найдите все целые числа n, при которых справедливо равенство

$$\frac{5n^2+4n+13}{n+1} = 11-8\sqrt{1-8n}.$$

Задача 4. Решите неравенство

$$9\log_2^2 x + 36 \leqslant 4\left(-8\cos\frac{\pi(47-8x)}{45} + 8\cos\frac{\pi(47-8x)}{45} + 7\right)\cdot\log_2 x.$$

Задача 5. В параллелограмме $ABCD$ угол между диагоналями AC и BD равен 30°. Известно отношение $AC : BD = 2 : \sqrt{3}$. Точка B_1 симметрична вершине B относительно прямой AC, а точка C_1 симметрична вершине C относительно прямой BD. Найдите отношение площадей треугольника AB_1C_1 и параллелограмма $ABCD$.

Задача 6. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$|x-3| - (1-2a)x^2 + (3-4a)x + 6a - 4 =$$
$$= \sin(|x-3| + 6a - 4) - \sin\big((1-2a)x^2 - (3-4a)x\big).$$

Ответы. **1.** $\{2, 4, 8, 16\}$. **2.** $\{2; 3\}$. **3.** $\{-15\}$. **4.** $\{4; 1/4\}$. **5.** $\frac{1}{4}$ или $\frac{5}{4}$. **6.** При $a \in (-\infty; 0) \cup [1/2; +\infty)$ решений нет; при $a \in (0; (3-\sqrt{3})/4)$ два решения: $x = 1 \pm 2\sqrt{a/(1-2a)}$; при $a = (3-\sqrt{3})/4$ три решения: $x = 2+\sqrt{3}$ и $x = 1 \pm \sqrt[4]{12}$; при $a \in ((3-\sqrt{3})/4; 1/3)$ четыре решения: $x = (2(a-1) \pm \sqrt{-8a^2+12a-3})/(2a-1)$, $x = 1 \pm 2\sqrt{a/(1-2a)}$; при $a = 1/3$ три решения: $x = -1$, $x = 3$, $x = 5$; при $a \in (1/3; 1/2)$ два решения: $x = 1 - 2\sqrt{a/(1-2a)}$, $x = (2(a-1) - \sqrt{-8a^2+12a-3})/(2a-1)$.

ВАРИАНТ 2004 (апрель), факультет вычислительной математики и кибернетики, 2.

Задача 1. Четыре числа a_1, a_2, a_3 и a_4 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если из них вычесть $3, 4, 32$ и 6 соответственно, то получатся числа, образующие в том же порядке арифметическую прогрессию. Найдите числа a_1, a_2, a_3 и a_4.

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{16}{x^2-8x+17} > 8x - x^2 - 9.$$

Задача 3. Найдите все целые числа n, при которых справедливо равенство

$$\frac{2n^2+n+1}{n+3} = 4\sqrt{3n+10} - 6.$$

Задача 4. Решите неравенство

$$3\log_3^2 x + 27 \leqslant 2\left(8\cos^2\frac{9\pi(27-x)}{91} + 8\cos\frac{9\pi(27-x)}{91} - 7\right)\cdot\log_3 x.$$

Задача 5. В треугольнике KLM угол между медианой LN и стороной KM равен 45°. Известно, что $KM : LN = 3 : \sqrt{2}$. Точка L_1 симметрична вершине L относительно прямой KM, а точка M_1 симметрична вершине M относительно прямой LN. Найдите отношение площадей треугольников KL_1M_1 и KLM.

Задача 6. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$9(1-a)x^2 - (3-6a)x + 2 - 3a - |3x+1| =$$
$$= \cos\left(9(1-a)x^2 + 2 - 3a\right) - \cos\left(|3x+1| + (3-6a)x\right).$$

Ответы. 1. $\{3, -6, 12, -24\}$. **2.** $\mathbb{R}\backslash\{4-\sqrt{3}; 4+\sqrt{3}\}$. **3.** $\{13\}$. **4.** $\{27; 1/27\}$. **5.** $\{1/4; 7/4\}$. **6.** При $a \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$ решений нет; при $a = 0$ одно решение $x = 1/3$; при $a \in \left(0; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$ два решения: $x = 1/3\cdot\left(1 \pm \sqrt{\frac{2a}{1-a}}\right)$; при $a = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ три решения: $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1\pm\sqrt[4]{12}}{3}$; при $a \in \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}; 2/3\right)$ четыре решения: $x = \frac{-a\pm\sqrt{-2a^2+6a-3}}{3(1-a)}$, $x = 1/3\cdot\left(1 \pm \sqrt{\frac{2a}{1-a}}\right)$; при $a = 2/3$ три решения: $x = -\frac{1}{3}$, $x = \pm 1$; при $a \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$ два решения: $x = \frac{1}{3}\cdot\left(1 + \sqrt{\frac{2a}{1-a}}\right)$, $x = \frac{-a+\sqrt{-2a^2+6a-3}}{3(1-a)}$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), факультет вычислительной математики и кибернетики (отделение специалистов), 1.

Задача 1. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}} - 3\cos\left(\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{2}\right)\right) + \frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)\cdot x = 2^{\log_{\sqrt{2}} 3} - 9.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{x^2-4}{\sqrt{15+2x-x^2}} \geqslant |x| - 2.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) - \sin\left(3x - \frac{5\pi}{16}\right) = -1.$$

Задача 4. Окружность с центром в точке M касается сторон угла AOB в точках A и B. Вторая окружность с центром в точке N касается отрезка OA, луча BA и продолжения стороны угла OB за точку O. Известно, что $ON : OM = 12 : 13$. Найдите отношение радиусов окружностей.

Задача 5. Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения

$$\frac{2}{16^x} - \frac{1}{8^x} - \frac{a+8}{4^x} + \frac{4-2a}{2^x} - a^2 + 4a + 5 = 0.$$

Задача 6. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ $(AD\|BC)$. Через точку B_1 проведена плоскость $\mathcal{P}$, пересекающая ребро AD в точке K, а ребро CD — в точке N. Прямые AA_1 и CC_1 эта плоскость пересекает в точках L и M соответственно. Известно, что $DN : DC = 3 : 4$, $BC = DK$ и $KN > DN$. Объем многогранника $ABCNKLB_1M$ относится к объему призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ как $49 : 144$. Найдите отношение длины отрезка DK к длине отрезка AD.

Ответы. **1.** $\mathbb{R}$. **2.** $(-3;-2] \cup \left[\frac{3-\sqrt{31}}{2}; \frac{\sqrt{23}-1}{2}\right] \cup [2;5)$. **3.** $\left\{\frac{15\pi}{16} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. **4.** $65 : 144$. **5.** При $a \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$ одно решение; при $a = -\frac{5}{4}$ два решения; при $a \in \left(-\frac{5}{4}; -1\right)$ три решения; при $a \in [-1; 1-\sqrt{2})$ два решения; при $a = 1-\sqrt{2}$ одно решение; при $a \in (1-\sqrt{2}; 5)$ два решения; при $a \in [5; +\infty)$ одно решение. **6.** $DK : AD = 1 : 2$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), факультет вычислительной математики и кибернетики (отделение специалистов), 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$\left(\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} - 2^{1,5} \cdot \sin 15^\circ - 3\right) \cdot x = \arccos(\cos 3) - 3.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 9}{\sqrt{24 - 2x - x^2}} \leqslant |x| - 3.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$-2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{7x}{2}\right)+\sin\left(3x+\frac{6\pi}{7}\right)=1.$$

Задача 4. Первая окружность с центром в точке A касается сторон угла KOL в точках K и L. Вторая окружность с центром в точке B касается отрезка OK, луча LK и продолжения стороны угла OL за точку O. Известно, что отношение радиуса первой окружности к радиусу второй окружности равно $\frac{20}{9}$. Найдите отношение длин отрезков OB и OA.

Задача 5. Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения

$$81^x-8\cdot 27^x+(20-2a)\cdot 9^x+(8a-21)\cdot 3^x+a^2-5a+6=0.$$

Задача 6. В основании прямой призмы $KLMN_1L_1M_1N_1$ лежит равнобокая трапеция $KLMN$ ($KN\|LM$). Через точку L_1 проведена плоскость $\mathcal{P}$, пересекающая ребро KN в точке A, а ребро MN — в точке D. Прямые KK_1 и MM_1 эта плоскость пересекает в точках B и C соответственно. Известно, что $ND : NM = 3 : 5$, $LM = AN$ и $AD > ND$. Объем многогранника $KLMDABL_1C$ относится к объему призмы $KLMN_1L_1M_1N_1$ как $79 : 225$. Найдите отношение длины отрезка NA к длине отрезка KN.

Ответы. **1.** $\mathbb{R}$. **2.** $\left[-3; \frac{2-\sqrt{34}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{46}-4}{2}; 3\right]$. **3.** $\left\{\frac{17\pi}{14}+2\pi n; n\in\mathbb{Z}\right\}$. **4.** $3:5$. **5.** При $a\in\left(-\infty; -\frac{17}{4}\right)$ нет решений; при $a=-\frac{17}{4}$ одно решение; при $a\in\left(-\frac{17}{4}; \frac{3}{4}\right)$ два решения; при $a=\frac{3}{4}$ три решения; при $a\in\left(\frac{3}{4}; 2\right)$ четыре решения; при $a\in[2;3)$ три решения; при $a\in[3;+\infty)$ два решения. **6.** $NA : KN = 1 : 2$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), факультет вычислительной математики и кибернетики (отделение бакалавров), 1.

Задача 1. Решите неравенство

$$\log_{4x-3}(15-16x)\leqslant 0.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-3\cdot\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)-1\right)\cdot x=3^{\log_{1/\sqrt{3}}2}-\frac{1}{4}.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$\frac{x^2-4}{\sqrt{20-x-x^2}} \leqslant |x|-2.$$

Задача 4. При всех значениях параметра d решите неравенство

$$4^x - d \leqslant 2^{x+2}.$$

Задача 5. Решите уравнение

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{7x}{2}\right) - \sin\left(4x-\frac{\pi}{14}\right) = -1.$$

Задача 6. Первая окружность с центром в точке A касается сторон угла KOL в точках K и L. Вторая окружность с центром в точке B касается отрезка OK, луча LK и продолжения стороны угла OL за точку O. Известно, что отношение радиуса первой окружности к радиусу второй окружности равно $\frac{15}{16}$. Найдите отношение длин отрезков OB и OA.

Задача 7. В основании прямой призмы $KLMN_1L_1M_1N_1$ лежит равнобокая трапеция $KLMN$ ($KN \parallel LM$). Через точку L_1 проведена плоскость $\mathcal{P}$, пересекающая ребро KN в точке A, а ребро MN — в точке D. Прямые KK_1 и MM_1 эта плоскость пересекает в точках B и C соответственно. Известно, что $ND : NM = 1 : 4$, $LM = AN$ и $AD > ND$. Объем многогранника $KLMDABL_1C$ относится к объему призмы $KLMN_1L_1M_1N_1$ как $57 : 144$. Найдите отношение длины отрезка NA к длине отрезка KN.

Ответы. 1. $\left(\frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right]$. **2.** $\mathbb{R}$. **3.** $\left[\frac{3-\sqrt{137}}{4}; -2\right] \cup \left[\frac{-5+\sqrt{153}}{4}; 2\right]$. **4.** Если $d \in (-\infty; -4)$, то решений нет; если $d = -4$, то $x = 1$; если $d \in (-4; 0)$, то $x \in [\log_2(2-\sqrt{d+4}); \log_2(2+\sqrt{d+4})]$; $x \in (-\infty; \log_2(2+\sqrt{d+4})]$, если $d \in [0; +\infty)$. **5.** $\left\{\frac{23\pi}{14} + 2\pi m; m \in \mathbb{Z}\right\}$. **6.** $4 : 5$. **7.** $NA : KN = 1 : 2$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), факультет вычислительной математики и кибернетики (отделение бакалавров), 2.

Задача 1. Решите неравенство $\log_{1-3x}(12x-1) \geqslant 0$.

Задача 2. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{13+4\sqrt{3}} - 2^{2,5}\cdot\cos 15^\circ + 1\right)\cdot x = 3^{\log_{\sqrt{3}} 2} - 4.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$\frac{x^2-9}{\sqrt{28+3x-x^2}} \geqslant |x|-3.$$

Задача 4. При всех значениях параметра c решите неравенство

$$9^x - c \geqslant 2\cdot 3^{x+1}.$$

Задача 5. Решите уравнение

$$2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}+3x\right)+\sin(5x)=-1.$$

Задача 6. Окружность с центром в точке M касается сторон угла AOB в точках A и B. Вторая окружность с центром в точке N касается отрезка OA, луча BA и продолжения стороны угла OB за точку O. Известно, что $ON : OM = 5 : 13$. Найдите отношение радиусов окружностей.

Задача 7. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Через точку B_1 проведена плоскость $\mathcal{P}$, пересекающая ребро AD в точке K, а ребро CD — в точке N. Прямые AA_1 и CC_1 эта плоскость пересекает в точках L и M соответственно. Известно, что $DN : DC = 2 : 5$, $BC = DK$ и $KN > DN$. Объем многогранника $ABCNKLB_1M$ относится к объему призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ как $84 : 225$. Найдите отношение длины отрезка DK к длине отрезка AD.

Ответы. **1.** $\left(0; \frac{1}{6}\right]$. **2.** $\mathbb{R}$. **3.** $(-4;-3)\cup\left[\frac{9-\sqrt{233}}{4}; \frac{\sqrt{161}-3}{4}\right]\cup[3;7)$. **4.** Если $c\in(-\infty;-9]$, то x — любое число; $x\in(-\infty;\log_3(3-\sqrt{c+9})]\cup$ $\cup\,[\log_3(3+\sqrt{c+9});+\infty)$, если $c\in(-9;0)$; $x\in[\log_3(3+\sqrt{c+9});+\infty)$, если $c\in[0;+\infty)$. **5.** $\left\{\frac{7\pi}{10}+2\pi k; k\in\mathbb{Z}\right\}$. **6.** $25:156$. **7.** $DK : AD = 1:2$.

ВАРИАНТ 2004 (март), физический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение

$$6\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)-3\cos x-1=0.$$

Задача 2. Решите систему неравенств

$$-2 < \frac{2}{x^2 - x - 2} < -1.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$\log_{32}(x^2 + 3x + 2)^5 + \log_2(x^2 - 3x + 2) < 2.$$

Задача 4. Окружность с центром O вписана в $\triangle ABC$, $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$. Прямые AO, BO и CO пересекают стороны BC, AC, и AB в точках K, L и M соответственно. Найдите отношение площади $\triangle BMK$ к площади $\triangle CKL$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |2^x - 2^y| + 2^x + 3 \cdot 2^y = 12\sqrt{2}, \\ |2^x + 2^{-y}| + 2^x - 33 \cdot 2^{-y} = 0. \end{cases}$$

Задача 6. В $\triangle ABC$ даны стороны $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках A, B и C. Найдите радиус наибольшей окружности.

Задача 7. Для каждого значения a решите уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{x - 3a}{x}\right) + 4\big[\log_4(x - 3a)\big]\log_2 x - 8\log_4^2 x = 0.$$

Задача 8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \parallel \parallel BB_1 \parallel CC_1)$ $AA_1 : AB = 4 : 3$. На боковых ребрах AA_1, BB_1 и CC_1 взяты точки K, L и M соответственно, так что $AK : KA_1 = 3 : 1$, $BL = LB_1$, $CM : MC_1 = 1 : 3$. Найдите двугранный угол между плоскостями KLM и ABC.

Ответы. **1.** $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **2.** $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 0$, $1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **3.** $-\sqrt{5} < x < -2$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $2 < x < \sqrt{5}$. **4.** $\frac{6}{11}$. **5.** $x_1 = \frac{5}{2}, y_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{7}{2} - \log_2 3, y_2 = \frac{1}{2} + \log_2 3$. **6.** $\frac{35}{2}$. **7.** Если $a = 0$, то $x > 0$; если $a \neq 0$, то $x = \frac{3a+\sqrt{9a^2+4}}{2}$. **8.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

ВАРИАНТ 2004 (март), физический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$10\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)+5\sin x-2=0.$$

Задача 2. Решите систему неравенств

$$-3<\frac{6}{x^2-2x-3}<-2.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$\log_6\left(x^2-5x+6\right)+2\log_{36}\left(x^2+5x+6\right)<2.$$

Задача 4. В $\triangle KLM$ даны стороны $KL=5$, $LM=6$, $KM=7$, точка O — центр вписанной окружности. Прямые KO, LO и MO пересекают стороны LM, KM и KL в точках A, B и C соответственно. Найдите отношение площади $\triangle KCB$ к площади $\triangle KAM$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}|5^y-5^x|+5^y+3\cdot 5^x=12\sqrt{5},\\ |5^y+5^{-x}|+4\cdot 5^y-126\cdot 5^{-x}=0.\end{cases}$$

Задача 6. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках K, L и M; $KL=5$, $LM=7$, $KM=8$. Найдите радиус наименьшей окружности.

Задача 7. Для каждого значения a решите уравнение

$$18\log_{27}^2 x-6[\log_{27}(x-4a)]\log_3 x-\log_3^2\left(\frac{x-4a}{x}\right)=0.$$

Задача 8. В правильной треугольной призме $KLMK_1L_1M_1$ ($KK_1 \parallel LL_1 \parallel MM_1$) $KK_1:KL=7:2$. На боковых ребрах KK_1, LL_1 и MM_1 взяты точки A, B и C соответственно, так что $KA:AK_1=4:3$, $LB:BL_1=2:5$, $MC:CM_1=6:1$. Найдите двугранный угол между плоскостями ABC и KLM.

Ответы. 1. $\frac{\pi}{10}\pm\arccos\frac{2}{5}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **2.** $1-\sqrt{2}<x<0, 2<x<1+\sqrt{2}$. **3.** $-\sqrt{13}<x<-3$, $-2<x<0$, $0<x<2$, $3<x<\sqrt{13}$. **4.** $\frac{60}{143}$. **5.** $x_1=\frac{1}{2}, y_1=\frac{3}{2}$; $x_2=\frac{1}{2}+\log_5 3, y_2=\frac{3}{2}-\log_5 3$. **6.** $\frac{35}{11}$. **7.** Если $a=0$, то $x>0$; если $a\neq 0$, то $x=2a+\sqrt{4a^2+1}$. **8.** $\operatorname{arctg} 2$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), физический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение

$$\sin x \cdot \sin 4x + \sin 5x \cdot \sin 2x - \cos 3x = 0.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{|x-1|}{1 - \frac{6}{|x-1|}} < -1.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$\log_2\big((2-2x-x^2)(x+2)\big) - \log_8\big((4+4x+x^2)(8x+16)\big) + 1 > 0.$$

Задача 4. В окружности с радиусом 4 через точку D диаметра BC ($BD : DC = 5 : 3$) проведена хорда EF, перпендикулярная к этому диаметру. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков BD, DF и дуги BF.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{x-2y} - \sqrt{2x-2y} = 24 - x, \\ 2^{x-2y} + 2\sqrt{2x-2y} = 2x + 8. \end{cases}$$

Задача 6. В трапеции $BCDE$ ($CD \parallel BE$) $BC \perp BE$, $CD = 10$, $BE = 14$, LN — средняя линия (точка L лежит на стороне BC). Прямая, проходящая через точку B и перпендикулярная к стороне DE, пересекает отрезок LN в точке M, $LM : MN = 2 : 1$. Найдите площадь трапеции $BCDE$.

Задача 7. При каких значениях a уравнение

$$\big(1 + \sin(3ax)\big)\sqrt{5\pi x - x^2} = 0$$

имеет ровно 5 различных корней?

Задача 8. В правильной треугольной пирамиде $SLMN$ с вершиной S проведена медиана MP в $\triangle SMN$ и даны $LM = 2$, $SL = 6$. Через середину K ребра SM проведена прямая KE, параллельная ребру LN. Через точку L проведена прямая, пересекающая прямые MP и KE в точках A и B соответственно. Найдите длину отрезка AB.

Ответы. **1.** $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$, $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **2.** $-5 < x < -1$, $3 < x < 7$. **3.** $-2 < x < -1 + \sqrt{2}$. **4.** $-3 + \sqrt{24}$. **5.** $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $y = \frac{-5+\sqrt{13}}{4}$. **6.** 96. **7.** $-\frac{13}{30} \leqslant a < -\frac{9}{30}$, $\frac{11}{30} < a \leqslant \frac{15}{30}$. **8.** $\frac{\sqrt{14}}{3}$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), физический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$\cos 2x \cdot \sin 3x + \cos 3x \cdot \sin 4x - \sin x = 0.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{|x-2|}{\frac{12}{|x-2|} - 1} > 1.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$\log_3\big((-x^2 - 4x + 2)(3 + x)\big) - \log_{27}\big((9 + 6x + x^2)(81 + 27x)\big) + 1 > 0.$$

Задача 4. Прямая, перпендикулярная к диаметру MN полукруга с радиусом 5, пересекает этот диаметр в точке K ($MK : KN = 2 : 8$), а дугу полуокружности — в точке L. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков LK, KN и дуги LN.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^{3x-2y} - 9x = 54 + 3\sqrt{6x - 2y}, \\ 3^{3x-2y} + 3x = 27 - \sqrt{6x - 2y}. \end{cases}$$

Задача 6. В трапеции $PQRS$ ($QR \| PS$) $PQ \perp PS$, $QR = 8$, $PS = 12$, точки A и C — середины сторон PQ и RS соответственно, точка B лежит на отрезке AC, причем $AB : BC = 4 : 1$. Прямая PB перпендикулярна к стороне RS. Найдите площадь трапеции $PQRS$.

Задача 7. При каких значениях a уравнение

$$\big(1 - \sin(5ax)\big)\sqrt{3\pi x - x^2} = 0$$

имеет ровно 4 различных корня?

Задача 8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена медиана AM в $\triangle SAC$ и даны $AB = 1$, $SA = 2$. Через середину D ребра SA проведена прямая DE, параллельная ребру BC. Через точку B проведена прямая, пересекающая прямые AM и DE в точках P и Q соответственно. Найдите длину отрезка PQ.

Ответы. **1.** $\frac{\pi n}{6}$, $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **2.** $-10 < x < -1$, $5 < x < 14$. **3.** $-3 < x < -2 + \sqrt{5}$. **4.** $-2 + \sqrt{20}$. **5.** $x = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$, $y = \frac{-5-\sqrt{13}}{4}$. **6.** 80. **7.** $-\frac{11}{30} \leqslant a < -\frac{7}{30}$, $\frac{5}{30} < a \leqslant \frac{9}{30}$. **8.** $\frac{1}{2}$.

ВАРИАНТ 2003 (апрель), факультет наук о материалах, 1.

Задача 1. Для приготовления водного раствора кислоты взяли 4 литра 40%-го и 6 литров 60%-го растворов кислоты. Затем часть полученной смеси вылили и добавили такое же количество чистой воды, в результате чего получился 39%-й раствор кислоты. Сколько литров воды было добавлено?

Задача 2. Решите неравенство

$$|3x+1|+2+\frac{3}{|3x+1|-2}\leqslant\frac{1}{|3x+1|+2}.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$\log_{2x^2}(4x^2+8-8x\sqrt{2})+\log_{2x^2}(2x^2+4+x\sqrt{32})=\frac{\log_{2x^2}2}{\log_{8x^2}2}.$$

Задача 4. В треугольнике ABC прямые, содержащие высоты AP, CR и BQ (точки P, R и Q лежат на прямых, содержащих соответствующие стороны треугольника ABC), пересекаются в точке O. Найдите площади треугольников ABC и POC, если известно, что $RP \parallel AC$, $AC=4$ и $\sin(\angle ABC)=24/25$.

Задача 5. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin x+2\cos 2x}-\sqrt{2}\cos 2x=0.$$

Задача 6. При каких значениях параметра a неравенство

$$(3+2\sqrt{2})^x+(a^4+6-4a^2)\cdot(3-2\sqrt{2})^x+2^{2y}-a\cdot 2^{y+1}+a^2-\sqrt{8}\leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответы. **1.** 2,5 л. **2.** $\left(-1;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}-2}{3};\frac{1}{3}\right)\cup\left\{-\frac{1}{3}\right\}$. **3.** ±1, ±2. **4.** $\frac{16}{3}$ и $\frac{21}{25}$ или 3 и $\frac{112}{75}$. **5.** πk; $(-1)^m\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)+\pi m$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $k,m,n\in\mathbb{Z}$. **6.** $\sqrt{2}$.

ВАРИАНТ 2003 (апрель), факультет наук о материалах, 2.

Задача 1. Для приготовления 36%-го водного раствора кислоты взяли чистую воду и 40%-й и 60%-й растворы кислоты. Сколько надо взять 60%-го раствора кислоты, если использовали 12 литров 40%-го раствора и 4 литра чистой воды?

Задача 2. Решите неравенство

$$|2x+1|+1+\frac{1}{|2x+1|+3}\leqslant\frac{4}{3-|2x+1|}.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$\log_{2x^2}(2x^2+6-x\sqrt{48})+\log_{2x^2}(x^2+3+x\sqrt{12})=\frac{\log_{2x^2}2}{\log_{8x^2}2}.$$

Задача 4. В трапеции $ABCD$ ($AD\parallel BC$) диагонали AC и BD пересекаются в точке O и перпендикулярны боковым сторонам. Продолжения боковых сторон пересекаются в точке E. Найдите площади треугольников EAD и COD, если известно, что $AD=6$, $\sin(\angle CDA)=4/5$.

Задача 5. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos x-2\cos 2x}+\sqrt{2}\cos 2x=0.$$

Задача 6. При каких значениях параметра b неравенство

$$(b^4+12-6b^2)\cdot(2+\sqrt{3})^z+(2-\sqrt{3})^z+9^y+3b^2+b\sqrt{12}\cdot 3^y-\sqrt{12}\leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение $(y;z)$.

Ответы. **1.** 4 л. **2.** $\left(-2;-\frac{\sqrt{17}+1}{4}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{17}-3}{4};1\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **3.** ±1, ±3. **4.** 12 и $\frac{181}{100}$ или 12 и $\frac{675}{28}$. **5.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)+2\pi m$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $k,m,n\in\mathbb{Z}$. **6.** $-\sqrt{3}$.

ВАРИАНТ 2004 (май), химический факультет, тестовый экзамен[1].

Задача 1. Решите неравенство

$$x-1>\frac{1}{x-2}.$$

[1]Этот экзамен не состоялся.

Задача 2. Решите уравнение

$$\log_{2x+1} 27 + \log_{1/3}(2x+1) > |\log_{1/3}(2x+1)^2|.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$-\sin 4x \cdot \cos x + 2\sin 2x \cdot \cos x + 2\cos 2x = 2.$$

Задача 4. В трапецию $KLMN$ с основаниями LM и KN вписана окружность с центром в точке O. Найдите площадь треугольника KMN, если угол LKN прямой и $OM = 2$, $ON = 4$.

Задача 5. Решите уравнение

$$\sqrt{1-x^2}(1-4x^2) + x(3-4x^2) = \sqrt{2}.$$

Задача 6. В пирамиде $SABC$ известно, что ребро SB перпендикулярно плоскости ABC, $\angle ABC = 60°$, $\angle BAC = 30°$, $SB = 10$, $BC = 16/\sqrt{3}$. Найдите расстояние между прямыми AB и SC.

Ответы. 1. $x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 2\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$. **2.** $x \in (0;1)$. **3.** πn, $n \in \mathbb{Z}$. **4.** $S = \frac{48}{5}$. **5.** $x = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. **6.** $\frac{40}{\sqrt{41}}$.

ВАРИАНТ 2004 (2 июля), экзамен для победителей олимпиад на факультетах: химическом, биологическом, наук о материалах и фундаментальной медицины, 1.

Задача 1. Решите уравнение $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$.

Задача 2. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4.$$

Задача 3. При всех значениях параметра a решите систему

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8a^2, \\ xy = 2a^2. \end{cases}$$

Задача 4. Точка D лежит на дуге BC окружности, описанной около правильного треугольника ABC. Длина отрезка BD равна 1, а длина отрезка AD равна 3. Найдите длину отрезка DC.

Задача 5. Найдите все пары натуральных чисел k и l, удовлетворяющих следующим условиям: 1) k и l имеют общий целый делитель, больший 4; 2) $53 < k < l$; 3) $k + l \leqslant 119$.

Задача 6. На боковых ребрах SA, SB и SC четырехугольной пирамиды $SABCD$, основание $ABCD$ которой есть квадрат, взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что $SA_1 : SA = 3 : 7$, $SB_1 : SB = 2 : 7$ и $SC_1 : SC = 4 : 9$. Плоскость, проходящая через A_1, B_1 и C_1, пересекает ребро SD в точке D_1. Найдите отношение $SD_1 : SD$ и отношение объема пирамиды $SA_1B_1C_1D_1$ к объему пирамиды $SABCD$.

Ответы. **1.** $x = \pi/6 + \pi n/3$, $n \in \mathbb{Z}$. **2.** $x \in (1; 3)$. **3.** $(x; y) = (2a; a)$, $(-2a; a)$, $a \in \mathbb{R}$. **4.** $DC = 2$, $DC = 4$. **5.** $(54; 60)$, $(54; 63)$, $(55; 60)$, $(56; 63)$. **6.** $SD_1 : SD = 12 : 13$, $V_{SA_1B_1C_1D_1}/V_{SABCD} = 220/1911$.

ВАРИАНТ 2004 (2 июля), экзамен для победителей олимпиад на факультетах: химическом, биологическом, наук о материалах и фундаментальной медицины, 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$\cos 4x + 2\sin^2 x = 1.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\log_2(7 - x) - \log_2(x + 1) > \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}.$$

Задача 3. При всех значениях параметра b решите систему

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 18a^2, \\ xy = 3a^2. \end{cases}$$

Задача 4. Точка N лежит на дуге LM окружности, описанной около правильного треугольника KLM. Длина отрезка LN равна 3, а длина отрезка MN равна 2. Найдите длину отрезка KN.

Задача 5. Найдите все пары натуральных чисел m и n, удовлетворяющих следующим условиям: 1) m и n имеют общий целый делитель, больший 4; 2) $45 < m < n$; 3) $m + n \leqslant 105$.

Задача 6. На боковых ребрах SK, SL и SM четырехугольной пирамиды $SKLMN$, основание $KLMN$ которой есть квадрат, взяты соответственно точки K_1, L_1 и M_1 так, что $SK_1 : SK = 4 : 9$,

$SL_1 : SL = 1 : 3$ и $SM_1 : SM = 4 : 11$. Плоскость, проходящая через K_1, L_1 и M_1, пересекает ребро SN в точке N_1. Найдите отношение $SN_1 : SN$ и отношение объема пирамиды $SK_1L_1M_1N_1$ к объему пирамиды $SKLMN$.

Ответы. **1.** $x = \pi n/3$, $n \in \mathbb{Z}$. **2.** $x \in (1; 7)$. **3.** $(x; y) = (3b; b)$, $(-3b; b)$, $b \in \mathbb{R}$. **4.** $KN = 1$, $KN = 5$. **5.** $(48; 54)$, $(48; 56)$, $(49; 56)$, $(50; 55)$. **6.** $SN_1 : SN = 1 : 2$, $V_{SK_1L_1M_1N_1}/V_{SKLMN} = 20/297$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), химический факультет и факультет наук о материалах, 1.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{10 + 3x - x^2}{x^2 - 3x + 2} \leqslant 1.$$

Задача 2. Решите уравнение $\sqrt{1 + \sin x} = 1 - 2\sin x$.

Задача 3. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_5 x + 3} - \sqrt{\log_5 x - 2} < \sqrt{\log_5 x - 1}.$$

Задача 4. Известно, что в равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) выполнено неравенство $BC > AD$. Трапеция $ADCE$ ($AE \parallel DC$) также равнобокая, причём $AE > DC$. Найдите BE, если известно, что косинус суммы углов CDE и BDA равен $1/3$, а $DE = 7$.

Задача 5. Дан куб $EFGHE_1F_1G_1H_1$ с длиной ребра, равной 2. На рёбрах EH и HH_1 взяты такие точки A и B, что $EA/AH = 2$, $HB/BH_1 = 1/2$. Через точки A, B, G_1 проведена плоскость. Найдите расстояние от точки E до этой плоскости.

Задача 6. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнение

$$\cos^{1/2} x + (a^2 - ab + b^2 - 3)^2 - (4a^2 - 4 - b^2 + 2ab)(x + 1)2^x = 0$$

имеет не менее двух различных корней, у которых равны абсолютные величины.

Ответы. **1.** $(-\infty; -1] \cup (1; 2) \cup [4; +\infty)$. **2.** πn, $n \in \mathbb{Z}$. **3.** $x > 5^{2\sqrt{21}/3}$. **4.** $BE = 14/3$. **5.** $2\sqrt{22}/11$. **6.** $(a; b)=(1; 2)$, $(-1; -2)$, $(7/\sqrt{31}; -4/\sqrt{31})$, $(-7/\sqrt{31}; 4/\sqrt{31})$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), химический факультет и факультет наук о материалах, 2.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{19 - x^2}{3 + 4x + x^2} \geqslant 1.$$

Задача 2. Решите уравнение $\sqrt{1 + 4\cos x} = 1 - 3\cos x$.

Задача 3. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_6 x + 4} < \sqrt{\log_6 x} + \sqrt{\log_6 x - 1}.$$

Задача 4. Известно, что трапеция $KLMN$ равнобокая, $KN \parallel LM$ и $KN < LM$. Трапеция $NKPM$ также равнобокая, причём $KP \parallel NM$ и $KP > NM$. Найдите LN, если известно, что синус суммы углов NLM и KPN равен $3/5$, а $LP = 6$.

Задача 5. На рёбрах NN_1 и KN куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ отмечены такие точки P и Q, что $KQ/QN = 1/4$, $NP/PN_1 = 4$. Через точки M_1, P, Q проведена плоскость. Найдите расстояние от точки K до этой плоскости, если длина ребра куба равна 3.

Задача 6. Найдите все значения параметров a и b, при которых среди корней уравнения

$$(a^2 + 2ab - b^2 - 7)^2 - (2a^2 - 5ab + b^2 + 1)(x - 7)5^x + \operatorname{tg}^2 x = 0$$

есть два различных корня с равными абсолютными величинами.

Ответы. 1. $[-4; -3) \cup (-1; 2]$. **2.** $\pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **3.** $x > 6^{2\sqrt{21}/3-1}$. **4.** $LN = 15/4$. **5.** $3/\sqrt{51}$. **6.** $(a; b)$=$(2; 1)$, $(-2; -1)$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), биологический факультет, факультет фундаментальной медицины, факультет биоинженерии и биоинформатики, 1.

Задача 1. Решите уравнение $\sqrt{x + 2} = |x - 1|$.

Задача 2. Решите уравнение $\sin x \sin 3x = \cos 2x \cos 4x$.

Задача 3. В равнобокой трапеции с основаниями 1 и 4 расположены две окружности, каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований. Найдите площадь трапеции.

Задача 4. Решите неравенство

$$\log_{(2^x-2)^2}\left(4^{x+1}-5\cdot 2^{x+2}+24\right)-$$
$$-\log_{(2^x-2)^{-2}}\left(2^{2x-2}-7\cdot 2^{x-2}+5/2\right)\geqslant 3/2.$$

Задача 5. В шар радиуса 4 вписана правильная шестиугольная пирамида с высотой 6, а в нее вписан второй шар. Найдите радиус второго шара.

Ответы. **1.** $(3\pm\sqrt{13})/2$. **2.** $\pi/10+\pi m/5$, $\pi/2+\pi n$, $m,n\in\mathbb{Z}$. **3.** $15\sqrt{2}/2$. **4.** $(-\infty;0)\cup\left[\log_2((9+\sqrt{13})/2);+\infty\right)$. **5.** $6/(1+\sqrt{5})$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), биологический факультет, факультет фундаментальной медицины, факультет биоинженерии и биоинформатики, 2.

Задача 1. Решите уравнение $\sqrt{5-2x}=|2x-2|$.

Задача 2. Решите уравнение $\sin 5x\cos 3x=\sin 7x\cos x$.

Задача 3. В равнобокой трапеции с основаниями 1 и 25 расположены две окружности, каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований. Найдите площадь трапеции.

Задача 4. Решите неравенство

$$\log_{(3^x-5)^2}\left(9^{x+1}-8\cdot 3^{x+2}+135\right)-$$
$$-\log_{(3^x-5)^{-2}}\left(3^{2x-2}-3^{x-2}+20/9\right)\geqslant 3/2.$$

Задача 5. Около шара радиуса 3 описана правильная шестиугольная пирамида с высотой 10, а около нее описан второй шар. Найдите радиус второго шара.

Ответы. **1.** $(3\pm\sqrt{13})/4$. **2.** $\pi/8+\pi m/4$, $\pi n/2$, $m,n\in\mathbb{Z}$. **3.** $78\sqrt{5}$. **4.** $\left(-\infty;\log_3(3-\sqrt{2})\right]\cup(\log_3 6;+\infty)$. **5.** $13/2$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), географический факультет, 1.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^6-64}}{x-3}\geqslant 0.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x + \sin 2x} = 0.$$

Задача 3. Пункты A и B соединены двумя дорогами. Первая дорога разделена паромной переправой с одним паромом. На второй дороге препятствий нет. Переправа на пароме занимает $\frac{1}{2}$ часа. Паром работает без перерывов. Из пункта A по первой дороге выезжает автомобиль, скорость движения которого по дороге равна 60 км/ч. Одновременно с ним из пункта B по той же дороге выезжает трактор со скоростью 20 км/ч. Автомобиль без задержки переправляется паромом и встречает трактор, ожидающий паром. После прибытия в пункт B автомобиль без остановки возвращается по второй дороге и прибывает в пункт A на 15 минут раньше трактора, затратив на обратный путь на $\frac{1}{2}$ часа больше, чем на путь из A в B. Найдите а) разность между длинами второй и первой дорог не учитывая длину переправы; б) длину второй дороги, если известно, что поехав обратно по первой дороге, автомобиль прибыл в пункт A одновременно с трактором.

Задача 4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Отрезки KM и LN пересекаются в точке E. Площади четырехугольников $AKEN$, $BKNL$ и $DNEM$ равны соответственно 6, 6 и 12. Найдите а) площадь четырехугольника $CMEL$; б) длину отрезка CD, если $AB = \frac{1}{2}$.

Задача 5. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |x-a| + |y-a| + |a+1-x| + |a+1-y| = 2, \\ y + 2|x-5| = 6 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Задача 6. Сколько цифр содержится в десятичной записи 99991-го члена последовательности a_n, если $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 2a_n + 1024$, $\lg 2 = 0,301029\ldots$?

Ответы. 1. $\{-2\} \cup \{2\} \cup (3; +\infty)$. **2.** $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **3.** а) 60 км, б) $\frac{195}{2}$ км. **4.** а) 12, б) $\frac{5}{2}$. **5.** 2, $\frac{16}{3}$. **6.** 30103.

ВАРИАНТ 2004 (июль), географический факультет, 2.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^{10}-1}}{x-2} \geqslant 0.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 4x}{\cos x - \cos 3x} = 0.$$

Задача 3. Пункты A и B соединены двумя дорогами. Первая дорога разделена паромной переправой с одним паромом. На второй дороге препятствий нет. Переправа на пароме занимает $\frac{1}{2}$ часа. Паром работает без перерывов. Из пункта A по первой дороге выезжает мотоцикл, скорость движения которого по дороге равна 30 км/ч. Одновременно с ним из пункта B по той же дороге выезжает велосипед со скоростью 10 км/ч. Мотоцикл без задержки переправляется паромом и встречает велосипед, ожидающий паром. После прибытия в пункт B мотоцикл без остановки возвращается по второй дороге и прибывает в пункт A на 15 минут раньше велосипеда, затратив на обратный путь на $\frac{1}{2}$ часа больше, чем на путь из A в B. Найдите а) разность между длинами второй и первой дорог, не учитывая длину переправы; б) длину второй дороги, если известно, что, поехав обратно по первой дороге, мотоцикл прибыл в пункт A одновременно с велосипедом.

Задача 4. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ точки A, B, C, D — середины сторон KL, LM, MN, NK соответственно. Известно, что $KL = 3$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Площади четырехугольников $KAOD$, $LAOB$ и $NDOC$ равны соответственно 6, 6 и 9. Найдите а) площадь четырехугольника $MCOB$; б) длину отрезка MN.

Задача 5. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |x+a| + |y-a| + |a+1+x| + |a+1-y| = 2, \\ y = 2|x-4| - 5 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Задача 6. Сколько цифр содержится в десятичной записи 9998-го члена последовательности a_n, если $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 5a_n + 500$, $\lg 5 = 0,698970\ldots$?

Ответы. 1. $\{-1\} \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$. **2.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. **3.** а) 30 км, б) $\frac{195}{4}$ км. **4.** а) 9, б) 7. **5.** $-2, -\frac{16}{3}$. **6.** 6990.

ВАРИАНТ 2004 (май), факультет почвоведения, 1.

Задача 1. Вычислите $\sin 255°$

Задача 2. Пусть $a = \sqrt{10} - \sqrt{11}$. Докажите, что число $a^2 + 1/a^2$ является целым.

Задача 3. Решите неравенство $4^x < 2^{x+1} + 3$.

Задача 4. Решите уравнение $|\cos x - 2\sin x| + \cos x = 0$.

Задача 5. Точки M и N находятся на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, прямая MN параллельна AD, а отрезок MN делится диагоналями трапециями на три равные части. Найдите длину отрезка MN, если $AD = a$, $BC = b$, а точка пересечения диагоналей трапеции лежит внутри четырёхугольника $MBCN$.

Задача 6. Шарик радиуса r брошен в стакан, образованный вращением параболы $y = 3x^2$ вокруг оси Oy. При каком наибольшем значении r шарик достигнет дна стакана (точки $O(0;0)$)?

Ответы. **1.** $x = -(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$. **2.** 42. **3.** $x \in (-\infty; \log_2 3)$. **4.** $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $\pi + 2\pi n$, $m, n \in \mathbb{Z}$. **5.** $3ab/(a + 2b)$. **6.** 1/6.

ВАРИАНТ 2004 (май), факультет почвоведения, 2.

Задача 1. Вычислите $\cos 195°$

Задача 2. Пусть $m = \sqrt{6} - \sqrt{7}$. Докажите, что число $m^2 + 1/m^2$ является целым.

Задача 3. Решите неравенство $36^x + 6^{x+1} > 16$.

Задача 4. Решите уравнение $|2\cos x - \sin x| + \sin x = 0$.

Задача 5. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ отмечены точки P и Q так, что прямая PQ параллельна AD, а отрезок PQ делится диагоналями трапециями на три равные части. Найдите длину основания BC, если известно $AD = a$, $PQ = m$, а точка пересечения диагоналей трапеции лежит внутри четырёхугольника $PBCQ$.

Задача 6. Шарик радиуса 4 брошен в стакан, образованный вращением параболы $y = ax^2$ вокруг оси Oy. При каком наибольшем значении параметра a шарик достигнет дна стакана (точки $O(0;0)$)?

Ответы. **1.** $x = -(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$. **2.** 26. **3.** $x \in (\log_6 2; +\infty)$. **4.** $-\pi/2+2\pi m$, $5\pi/4 + 2\pi n$, $m, n \in \mathbb{Z}$. **5.** $am/(3a - 2m)$. **6.** 1/8.

ВАРИАНТ 2004 (июль), факультет почвоведения, 1.

Задача 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^2 - 3x$ при $x \in [-1; 3]$.

Задача 2. Решите уравнение $|5x+1|+7x+2=0$.

Задача 3. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2-x-6}=-\sqrt{2x^2+4x-2}.$$

Задача 4. Решите неравенство $\log_{0,5}(2^{x+1}-3)\geqslant x-1$.

Задача 5. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству $0\leqslant x<0$ и являющиеся решениями уравнения $\sqrt{\operatorname{tg}3x}=\sqrt{-\operatorname{tg}x}$.

Задача 6. В окружность радиуса 5 вписан квадрат. На окружности отмечена точка, расстояние от которой до одной из вершин квадрата равно 6. Найдите расстояние от этой точки до трёх других вершин квадрата.

Задача 7. Докажите, что график функции

$$y=4x+\log_2\left(\frac{x^2+5x}{x^2+3x-4}\right)$$

имеет центр симметрии, и найдите координаты $(x;y)$ этого центра симметрии.

Ответы. **1.** $\max y=9$, $\min y=-9/8$. **2.** $x=-1/2$. **3.** -4. **4.** $x\in\in(\log_2(3/2);1]$. **5.** 0, $3\pi/4$. **6.** 8, $\sqrt{2}$, $7\sqrt{2}$. **7.** $(-2;-8)$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), факультет почвоведения, 2.

Задача 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^2-5x$ при $x\in[-1;4]$.

Задача 2. Решите уравнение $|2x+1|+4x+4=0$.

Задача 3. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2+7x+6}-\sqrt{x^2+2x-3}=-\sqrt{2x^2+9x+3}.$$

Задача 4. Решите неравенство $\log_{0,1}(10^x-9)\geqslant x-1$.

Задача 5. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству $-\pi/2\leqslant x<\pi/2$ и являющиеся решениями уравнения $\sqrt{-\operatorname{tg}x}=\sqrt{\operatorname{tg}7x}$.

Задача 6. Вокруг квадрата со стороной 3 описана окружность. На окружности отмечена точка, расстояние от которой до одной из вершин квадрата равно 2. Найдите расстояние от этой точки до трёх других вершин квадрата.

Задача 7. Докажите, что график функции

$$y = 2x + \log_3 \left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 10x + 24} \right)$$

имеет центр симметрии, и найдите координаты $(x; y)$ этого центра симметрии.

Ответы. **1.** $\max y = 12$, $\min y = -25/8$. **2.** $x \in (-3; 0) \cup (0; 3)$. **3.** 0; 8. **4.** $x \in (\lg 9; 1]$. **5.** 0, $-\pi/6$, $-\pi/3$. **6.** $\sqrt{14}$, $\sqrt{7} \pm \sqrt{2}$. **7.** $(-1; -2)$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), геологический факультет, 1.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{x-2}{|x-2|} \leqslant 4 - x^2.$$

Задача 2. Какие значения может принимать $\sin x$, если

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}?$$

Задача 3. Решите неравенство $\sqrt{441 - x^2} \leqslant x + 21$.

Задача 4. В треугольнике ABC угол B прямой, точка M лежит на стороне AC, причем $AM : MC = 1 : 3\sqrt{3}$. Величина угла ABM равна $\frac{\pi}{6}$, $BM = 6$. Найдите величину угла BAC и расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников BCM и BAM.

Задача 5. Решите неравенство

$$\log_{3-x}(x^2 - 10x + 25) - 2\log_{3-x}(4x - x^2 + 5) + 2 \leqslant 0.$$

Задача 6. Две группы геологов исследуют маршрут, проходящий от пункта A через пункт B до пункта C. Первая группа проходит весь маршрут за 2, а вторая — за 3 дня. Расстояние между A и B вдвое меньше расстояния между B и C. Скорости движения групп на участках AB и BC постоянны, но на участке AB скорости обеих групп в m раз меньше, чем их скорости на участке BC. Группы выходят одновременно из A и C навстречу друг другу. Если первая группа выходит из A, а вторая из C, то они встречаются в пункте B. Если же первая выходит из C, а вторая из A, то они встречаются в пункте D.

Какую часть от длины всего маршрута составляет расстояние между B и D ? Чему равно значение m?

Задача 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\cos(x+y)} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \dfrac{\cos x}{\cos(x+y)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Задача 8. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной длины $2\sqrt{2}$. Ребра SB и SC равны, шар касается сторон основания, плоскости грани SBC, а также ребра SA. Чему равен радиус шара, если $SA = \frac{3\sqrt{2}}{2}$?

Ответы. **1.** $[-\sqrt{5}; 2)$. **2.** $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$. **3.** $\{-21\} \cup [0; 21]$. **4.** $\operatorname{arctg} 3; 10$. **5.** $[1; 2)$. **6.** $\frac{1}{9}$; $m = 3$. **7.** $\left\{\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi m; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right); \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi m; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right); k, m \in \mathbb{Z}\right\}$. **8.** 1.

ВАРИАНТ 2004 (июль), геологический факультет, 2.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{x-3}{|x-3|} \leqslant 5 - x^2.$$

Задача 2. Какие значения может принимать $\cos x$, если

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}?$$

Задача 3. Решите неравенство $\sqrt{289 - x^2} \leqslant x + 17$.

Задача 4. В треугольнике ABC угол B прямой, точка M лежит на стороне AC, причем $AM : MC = \sqrt{3} : 4$. Величина угла ABM равна $\frac{\pi}{3}$, $BM = 8$. Найдите величину угла BAC и расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников BCM и BAM.

Задача 5. Решите неравенство

$$\log_{5-x}(x^2 - 14x + 49) - 2\log_{5-x}(8x - x^2 - 7) + 2 \leqslant 0.$$

Задача 6. Две группы геологов исследуют маршрут, проходящий от пункта A через пункт B до пункта C. Первая группа проходит весь маршрут за 2, а вторая — за 3 дня. Расстояние между B и C вдвое меньше расстояния между A и B. Скорости движения групп на участках AB и BC постоянны, но на участке AB скорости обеих групп в m раз больше, чем их скорости на участке BC. Группы выходят одновременно из A и C навстречу друг другу. Если первая группа выходит из A, а вторая из C, то они встречаются в пункте B. Если же первая выходит из C, а вторая из A, то они встречаются в пункте D. Какую часть от длины всего маршрута составляет расстояние между B и D ? Чему равно значение m?

Задача 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\cos(x-y)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{\cos x}{\cos(x-y)} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Задача 8. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной длины $4\sqrt{2}$. Ребра SB и SC равны, шар касается сторон основания, плоскости грани SBC, а также ребра SA. Чему равен радиус шара, если $SA = 3\sqrt{2}$?

Ответы. **1.** $[-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$. **2.** $\{0; -\sqrt{3}/2\}$. **3.** $\{-17\} \cup [0; 17]$. **4.** $\operatorname{arctg} 4; 17$. **5.** $[3; 4)$. **6.** $\frac{2}{9}; m = \frac{4}{3}$. **7.** $\left\{\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi m; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right); \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right); k, m \in \mathbb{Z}\right\}$. **8.** 2.

ВАРИАНТ 2004 (июль), филологический факультет, 1.

Задача 1. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 + x + \frac{2a-1}{a+5} = 0$$

не имеет решений?

Задача 2. Решите уравнение

$$4\cos^2 3x - 4\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$(x+4)\cdot(x^2+4) = 5 - 2^{x+4} - 16(\sqrt{2})^x.$$

Задача 4. Из точки M на плоскость α опущен перпендикуляр MH длины $\sqrt{3}$ и проведены две наклонные, составляющие с перпендикуляром углы по 60°. Угол между наклонными равен 120°. 1. Найдите расстояние между основаниями A и B наклонных. 2. На отрезке AB как на катете в плоскости α построен прямоугольный треугольник ABC (угол A прямой). Найдите объем пирамиды $MABC$, зная, что $\cos(\angle BMC) = -\frac{1}{3}$.

Задача 5. Криптографическая лаборатория получила задание расшифровать три текста одинакового объема. Капитан Иванов на расшифровку первого и второго текстов в сумме затратил 40,5 минут, а на расшифровку второго и третьего — 37,5 минут. Оказалось также, что второй текст он расшифровывал с такой же скоростью, как в среднем первый и третий. За какое время капитан Иванов выполнил задание?

Задача 6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} y = a|x - 3a|, \\ |x| = b - |y|. \end{cases}$$

1. При каких значениях параметров a и b эта система относительно неизвестных x и y имеет бесконечно много решений? 2. На плоскости $(x; y)$ изобразите множество точек, координаты которых таковы, что система относительно неизвестных a и b имеет ровно три решения.

Ответы. 1. $(-\infty; -5) \cup (-\frac{9}{7}; +\infty)$. **2.** $(-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$. **3.** -4. **4.** 1. 6. 2. $3\sqrt{5}$. **5.** 58,5 минут. **6.** 1. $(\pm 1; 3)$. 2. $0 < y < \frac{x^2}{12}$ при $x > 0$ и $-\frac{x^2}{12} < y < 0$ при $x < 0$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), филологический факультет, 2.

Задача 1. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 - x + \frac{3 - a}{2a + 1} = 0$$

не имеет решений?

Задача 2. Решите уравнение

$$2\sin^2 4x - 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + 1 = 0.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$(x-3)\cdot(x^2+2)=12-3^{x-1}-\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{3})^{x+1}.$$

Задача 4. Из точки M на плоскость α опущен перпендикуляр MH длины 3 и проведены две наклонные, составляющие с перпендикуляром углы по 30°. Угол между наклонными равен 60°. 1. Найдите расстояние между основаниями A и B наклонных. 2. На отрезке AB как на катете в плоскости α построен прямоугольный треугольник ABC (угол A прямой). Найдите объем пирамиды $MABC$, зная, что $\cos(\angle BMC)=\frac{3}{4}$.

Задача 5. Бюро переводов получило заказ на перевод трех текстов одинакового объема. Переводчица Сидорова на перевод первого и второго текстов в сумме потратила 1 час 21 минуту, а на перевод первого и третьего — 1 час 18 минут. Оказалось также, что второй текст она переводила с такой же скоростью, как в среднем первый и третий. За какое время был выполнен весь перевод?

Задача 6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} y=a|x-2a|, \\ |x|=b+|y|. \end{cases}$$

1. При каких значениях параметров a и b эта система относительно неизвестных x и y имеет бесконечно много решений? 2. На плоскости $(x;y)$ изобразите множество точек, координаты которых таковы, что система относительно неизвестных a и b имеет ровно три решения.

Ответы. **1.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{11}{6}\right)$. **2.** $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$. **3.** 3. **4.** 1. $2\sqrt{3}$. 2. 6. **5.** 1 час 57 минут. **6.** 1. $(\pm1;\pm2)$. 2. $0<y<\frac{x^2}{8}$ при $x>0$ и $-\frac{x^2}{8}<y<0$ при $x<0$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), экономический факультет (отделение экономики), 1.

Задача 1. Вычислите произведение всех отрицательных корней уравнения

$$\frac{3x^3}{2\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)}+\frac{1}{\sqrt{3}x}=2\sqrt{5}x\,\mathrm{tg}\left(\frac{13\pi}{4}\right).$$

Задача 2. Решите неравенство

$$1 + 2\sin^2(4\pi x) \cdot \log_{\frac{1}{3}}(11x - 4x^2 - 7) \leqslant \cos(8\pi x).$$

Задача 3. Окружность, пересекающая боковые стороны AC и CB равнобедренного треугольника ACB соответственно в точках P и Q, является описанной около треугольника ABQ. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке D так, что $AQ : AD = 4 : 3$. Найдите площадь треугольника DQB, если площадь треугольника PQC равна 3.

Задача 4. Решите неравенство

$$\log_{x+3}(2x+5) \cdot \log_{4x^2+20x+25}(x^2+2x+1) + \\ + \log_{\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3x+9}\right)}(x^2 - x - 2) \geqslant 0.$$

Задача 5. Паром грузоподъемностью 109 тонн перевозит джипы и грузовики. Количество перевозимых на пароме грузовиков не менее чем на 20% превосходит количество перевозимых джипов. Вес и стоимость перевозки одного джипа составляют 3 тонны и 600 рублей, грузовика — 5 тонн и 700 рублей соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость перевозки всех джипов и грузовиков при данных условиях.

Задача 6. Найдите наибольшее значение ω, при котором имеет решение система

$$\begin{cases} 4\sin^2 y - \omega = 16\sin^2\frac{2x}{7} + 9\operatorname{ctg}^2\frac{2x}{7}, \\ (\pi^2\cos^2 3x - 2\pi^2 - 72)y^2 = 2\pi^2(1+y^2)\sin 3x. \end{cases}$$

Задача 7. В правильную треугольную пирамиду с высотой $h = \frac{5}{4}$ и стороной основания $a = \sqrt{15}$ вложены пять шаров одинакового радиуса. Один из шаров касается основания пирамиды в его центре. Каждый из трех других шаров касается своей боковой грани, причем точка касания лежит на апофеме и делит ее в отношении $1 : 2$, считая от вершины. Пятый шар касается всех четырех шаров. Найдите радиус шаров.

Ответы. 1. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **2.** $\left\{\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right\}$. **3.** $\frac{9}{2}$. **4.** $\left(-\frac{5}{2}; -2\right) \cup (2; 3]$. **5.** 17100 рублей. **6.** -14. **7.** $\frac{1}{6}$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), экономический факультет (отделение экономики), 2.

Задача 1. Вычислите произведение всех отрицательных корней уравнения

$$\sqrt{2}x^3 + \frac{2\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)}{x} + \frac{6\sqrt{11}x}{\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{23\pi}{6}\right)} = 0.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \log_2\left(5 - x^2 + 4x\right) \geqslant 4\cos\left(\pi x\right) + 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Задача 3. Площадь равнобедренного треугольника PRQ равна 12. На боковых сторонах PR и RQ взяты соответственно точки B и C так, что вокруг четырехугольника $PBCQ$ можно описать окружность и $PQ\ :\ BC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника APQ, где A — точка пересечения отрезков PC и BQ.

Задача 4. Решите неравенство

$$\log_{2-x}\left(1-2x\right) \cdot \log_{1-4x+4x^2}\left(x^2+6x+9\right) + \\ + \log_{\frac{1}{2}-\frac{x}{2x+4}}\left(x^2+4x+3\right) \leqslant 0.$$

Задача 5. Автофургон грузоподъемностью 339 кг перевозит ящики с виноградом и яблоками. Вес и стоимость одного ящика с виноградом составляют 15 кг и 10 условных единиц, ящика с яблоками — 27 кг и 8 условных единиц соответственно. Известно, что количество загруженных на автофургон ящиков с виноградом составляет не более 70% от количества загруженных ящиков с яблоками. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость всех ящиков с виноградом и яблоками, перевозимых автофургоном при данных условиях.

Задача 6. Найдите наименьшее значение z, при котором имеет решение система

$$\begin{cases} z - 8\cos^2\frac{3y}{8} - 2\operatorname{tg}^2\frac{3y}{8} = 2\cos^2 2x, \\ 2\pi(1+|x|)\cos 3y + |x|(\pi\sin^2 3y - 16 - 2\pi) = 0. \end{cases}$$

Задача 7. В правильную четырехугольную пирамиду с высотой $h = 1$ и стороной основания $a = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$ вложены шесть шаров одинакового радиуса. Один из шаров касается основания пирамиды в его центре.

Каждый из четырех других шаров касается своей боковой грани, причем точка касания лежит на апофеме и делит ее в отношении $1:2$, считая от вершины. Шестой шар касается всех пяти шаров. Найдите радиус шаров.

Ответы. **1.** 1. **2.** $\{1;3\}$. **3.** $\frac{12}{5}$. **4.** $(-\infty;-3)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **5.** 132 у. е. **6.** 7. **7.** $\frac{2}{15}$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), экономический факультет (отделение менеджмента), 1.

Задача 1. Вычислите сумму всех корней уравнения

$$1-\frac{\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)}{x}=\frac{x}{3\operatorname{tg}\left(\frac{13\pi}{6}\right)}.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$2\sin^2(4\pi x)\cdot\log_{\frac{1}{3}}(11x-4x^2-7)=\cos(8\pi x)-1.$$

Задача 3. Площадь прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) равна 6, радиус описанной около него окружности равен $\frac{5}{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

Задача 4. Решите неравенство

$$2\log_{x+1}(1-2x)\cdot\log_{1-4x+4x^2}(x+3)+\log_{\frac{1}{x+1}}(x^2+7x+12)\leqslant 0.$$

Задача 5. Баржа грузоподъемностью 96 тонн перевозит контейнеры типов А и Б при условии полной загрузки. Количество загруженных на баржу контейнеров типа Б не менее чем на 25% превосходит количество загруженных контейнеров типа А. Вес и стоимость одного контейнера типа А составляют 3 тонны и 5 тысяч рублей, контейнера типа Б — 4 тонны и 2 тысячи рублей соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

Задача 6. Найдите наибольшее значение u, при котором имеет решение система

$$\begin{cases}\pi^2u+9y^2=9\pi y,\\ y^2(18+2\pi^2-\pi^2\sin^2 3x)+2\pi^2(1+y^2)\cos 3x=0.\end{cases}$$

Ответы. **1.** $\sqrt{3}$. **2.** $\left\{\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right\}$. **3.** 1. **4.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **5.** 90 тысяч рублей. **6.** 2.

ВАРИАНТ 2004 (июль), экономический факультет (отделение менеджмента), 2.

Задача 1. Вычислите сумму всех корней уравнения

$$2\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{3x}{4}\operatorname{ctg}\left(\frac{10\pi}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}x}.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$\cos^2(\pi x)\cdot\log_3(16x - 7 - 4x^2) = 3\cos(2\pi x) + 3\sin^2(\pi x).$$

Задача 3. В прямоугольном треугольнике PQR ($\angle R = 90^\circ$) медиана RM равна $\frac{5}{4}$. Найдите площадь треугольника PQR, если его периметр равен 6.

Задача 4. Решите неравенство

$$2\log_{x+4}(2x+7)\cdot\log_{4x^2+28x+49}(2-x) + \log_{\frac{1}{x+4}}(x^2 - 5x + 6) \geqslant 0.$$

Задача 5. Паром грузоподъемностью 111 тонн перевозит микроавтобусы и грузовики при условии полной загрузки. Количество загруженных на паром микроавтобусов составляет не более 70% от количества загруженных на паром грузовиков. Вес и стоимость одного микроавтобуса составляют 5 тонн и 5 тысяч условных единиц, грузовика — 9 тонн и 4 тысячи условных единиц соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость всех микроавтобусов и грузовиков, перевозимых паромом при данных условиях.

Задача 6. Найдите наименьшее значение v, при котором имеет решение система

$$\begin{cases} \pi^2 v - 16x^2 = 16\pi x, \\ 2\pi(1+|x|)\sin 3y = |x|(2\pi + 8 - \pi\cos^2 3x). \end{cases}$$

Ответы. **1.** $\frac{4\sqrt{6}}{3}$. **2.** $\left\{\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right\}$. **3.** $\frac{3}{2}$. **4.** $\left(-\frac{7}{2}; -3\right)$. **5.** 66 тысяч у. е. **6.** -3.

ВАРИАНТ 2004 (июль), экономический факультет (вечернее отделение), 1.

Задача 1. Вычислите сумму всех корней уравнения

$$\frac{\sqrt{3}}{x}\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{7}}{\operatorname{ctg}\left(\frac{19\pi}{6}\right)} = x.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\log_2\left(5-x^2+4x\right)-4\cos\left(\pi x\right)=4\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Задача 3. На боковых сторонах PQ и QR равнобедренного треугольника PQR взяты соответственно точки A и B так, что $AB:PR = 3:5$ и вокруг четырехугольника $PABR$ можно описать окружность. Отрезки AR и PB пересекаются в точке C, причем площадь треугольника PCR равна 10. Найдите площадь треугольника PQR.

Задача 4. Решите неравенство

$$2\log_{x-2}\left(7-2x\right)\cdot\log_{4x^2-28x+49}\left(x+1\right)+\log_{\left(\frac{x}{2x-4}-\frac{1}{2}\right)}\left(x^2-1\right)\leqslant 0.$$

Задача 5. Паром грузоподъемностью 126 тонн перевозит микроавтобусы и грузовики. Вес и стоимость одного микроавтобуса составляют 5 тонн и 10 тысяч условных единиц, грузовика — 9 тонн и 8 тысяч условных единиц соответственно. Известно, что количество загруженных на паром микроавтобусов составляет не более 70% от количества загруженных на паром грузовиков. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость всех микроавтобусов и грузовиков, перевозимых паромом при данных условиях.

Задача 6. Найдите наименьшее значение v, при котором имеет решение система

$$\begin{cases}\pi^2 v-16x^2=16\pi x,\\ 2\pi(1+|x|)\sin 3y=|x|(2\pi+8-\pi\cos^2 3x).\end{cases}$$

Задача 7. В правильную четырехугольную пирамиду с боковым ребром $l=\sqrt{5}$ и стороной основания $a=\sqrt{2}$ вложены шесть шаров одинакового радиуса. Один из шаров касается основания пирамиды в его центре. Каждый из четырех других шаров касается своей боковой грани в точке пересечения ее медиан. Шестой шар касается всех пяти шаров. Найдите радиус шаров.

Ответы. 1. $\sqrt{\frac{7}{3}}$. **2.** $\{1;3\}$. **3.** 40. **4.** $\left(3;\frac{7}{2}\right)$. **5.** 150 тысяч у. е. **6.** -3. **7.** $\frac{1}{6}$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), экономический факультет (вечернее отделение), 2.

Задача 1. Вычислите сумму всех корней уравнения

$$\sqrt{2} + \frac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{13\pi}{3}\right)}{12x} = 2x\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right).$$

Задача 2. Решите уравнение

$$1 + \sin^2(3\pi x) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(5x - x^2 - 6) = \cos(6\pi x).$$

Задача 3. Окружность, пересекающая боковые стороны AB и BC равнобедренного треугольника ABC соответственно в точках D и E, является описанной около треугольника ADC. Отрезки AE и DC пересекаются в точке Q так, что площадь треугольника ADQ равна 1 и $DQ : DC = 2 : 5$. Найдите площадь треугольника DBE.

Задача 4. Решите неравенство

$$2\log_{x+3}(2x+5) \cdot \log_{4x^2+20x+25}(-x-1) + \log_{\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3x+9}\right)}(x^2 - x - 2) \geqslant 0.$$

Задача 5. Баржа грузоподъемностью 95 тонн перевозит контейнеры типов А и Б. Количество загруженных на баржу контейнеров типа Б не менее чем на 25% превосходит количество загруженных контейнеров типа А. Вес и стоимость одного контейнера типа А составляют 3 тонны и 5 тысяч рублей, контейнера типа Б — 4 тонны и 2 тысячи рублей соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

Задача 6. Найдите наибольшее значение u, при котором имеет решение система

$$\begin{cases} \pi^2 u + 9y^2 = 9\pi y, \\ y^2(18 + 2\pi^2 - \pi^2\sin^2 3x) + 2\pi^2(1 + y^2)\cos 3x = 0. \end{cases}$$

Задача 7. В правильную треугольную пирамиду с высотой $h = \sqrt{2}$ и стороной основания $a = \sqrt{3}$ вложены пять шаров одинакового радиуса. Один из шаров касается основания пирамиды в его центре. Каждый из трех других шаров касается своей боковой грани в точке пересечения ее медиан. Пятый шар касается всех четырех шаров. Найдите радиус шаров.

Ответы. 1. $-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **2.** $\left\{\dfrac{7}{3}; \dfrac{8}{3}\right\}$. **3.** $\dfrac{10}{3}$. **4.** $\left(-\dfrac{5}{2}; -2\right)$. **5.** 85 тысяч рублей. **6.** 2. **7.** $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), психологический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение

$$4^x - 12 \cdot 2^x - 1 = 0.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x-2}{2x-10}} \left(\frac{x+2}{4}\right) \leqslant 1.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$\sqrt{15} \cos x \operatorname{ctg} x + \sqrt{5} \cos x + \sqrt{5} \operatorname{ctg} x = 0$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $[-\pi; \pi]$.

Задача 4. Окружность радиуса 3 проходит через вершины A и B прямоугольного треугольника ABC с катетом $AB = 5$. Прямая CD касается этой окружности в точке D. Найдите величину угла ABD и длину второго катета AC, если луч DA делит угол CDB пополам.

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|x^2 - 5|x|\right| = a(x+4)$$

имеет ровно три различных решения.

Ответы. 1. $x = \log_2(6+\sqrt{37})$. **2.** $x \in [-1; 2) \cup (5; 6] \cup (8; +\infty)$. **3.** $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $x = -\dfrac{\pi}{3} + (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; сумма корней, принадлежащих отрезку $[-\pi; \pi]$, равна $\dfrac{5\pi}{6}$. **4.** $\angle ABD = \arcsin\left(\dfrac{5}{6}\right)$, $AC = \dfrac{225}{16\sqrt{11}}$. **5.** $a = 0$; $a = 1$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), психологический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$25^x - 10 \cdot 5^x - 3 = 0.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x-1}{2x-8}} \left(\frac{x+7}{6} \right) \leqslant 1.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$\sqrt{21} \cos x \operatorname{ctg} x - \sqrt{7} \cos x - \sqrt{7} \operatorname{ctg} x = 0$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $[-\pi; \pi]$.

Задача 4. Через вершины K и M прямоугольного треугольника KML с катетом $KM = 7$ проходит окружность диаметра 8. Прямая LN касается этой окружности в точке N. Найдите величину угла KMN и длину второго катета KL, если луч NK делит угол LNM пополам.

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left| x^2 - 16|x| \right| = a(x - 9)$$

имеет ровно три различных решения.

Ответы. **1.** $x = \log_5(5+\sqrt{28})$. **2.** $x \in [-5; 1) \cup (4; 5] \cup (7; +\infty)$. **3.** $\pi/2+\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $x = \pi/6 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; сумма корней, принадлежащих отрезку $[-\pi; \pi]$, равна $\pi/6$. **4.** $\angle KMN = \arcsin(7/8)$, $KL = 784/(33\sqrt{15})$. **5.** $a = 0$; $a = -4$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), психологический факультет, 3.

Задача 1. Решите уравнение $16^x - 8 \cdot 4^x - 2 = 0$.

Задача 2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x+1}{2x-6}} \left(\frac{x+6}{4} \right) \leqslant 1.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$\sqrt{5} \cos x \operatorname{ctg} x - \sqrt{15} \cos x - \sqrt{15} \operatorname{ctg} x = 0$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $[-\pi; \pi]$.

Задача 4. Окружность радиуса 5 проходит через вершины C и B прямоугольного треугольника ABC с катетом $CB = 5$. Прямая AD касается этой окружности в точке D. Найдите величину угла CBD и длину второго катета CA, если луч DC делит угол ADB пополам.

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|x^2 - 3|x|\right| = a(x+1)$$

имеет ровно три различных решения.

Ответы. **1.** $x = \log_2(6+\sqrt{37})$. **2.** $x \in [6; 8)$. **3.** $\pi/2 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $x = -\pi/3 + (-1)^{n+1}\pi/6 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; сумма корней, принадлежащих отрезку $[-\pi; \pi]$, равна $5\pi/6$. **4.** $\angle CBD = \arcsin(5/6)$, $CA = 225/(16\sqrt{11})$. **5.** $a = 0$; $a = 1$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), психологический факультет, 4.

Задача 1. Решите уравнение $9^x - 6 \cdot 3^x - 1 = 0$.

Задача 2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x+2}{3x-6}}\left(\frac{x+7}{6}\right) \leqslant 1.$$

Задача 3. Решите уравнение

$$\sqrt{7}\cos x \operatorname{ctg} x + \sqrt{21}\cos x + \sqrt{21}\operatorname{ctg} x = 0$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $[-\pi; \pi]$.

Задача 4. Через вершины K и M прямоугольного треугольника LKM с катетом $KM = 6$ проходит окружность диаметра 7. Прямая LN касается этой окружности в точке N. Найдите величину угла MKN и длину второго катета ML, если луч NM делит угол LNK пополам.

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|x^2 - 8|x|\right| = a(x-1)$$

имеет ровно три различных решения.

Ответы. **1.** $x = \log_2(6+\sqrt{37})$. **2.** $x \in [6; 8)$. **3.** $\pi/2 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $x = -\pi/3 + (-1)^{n+1}\pi/6 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; сумма корней, принадлежащих отрезку $[-\pi; \pi]$, равна $5\pi/6$. **4.** $\angle MKN = \arcsin(6/7)$, $ML = 1764/(95\sqrt{13})$. **5.** $a = 0$; $a = 1$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), ИСАА, 1.

Задача 1. Решите неравенство $\sqrt{x^2-25}\cdot(x+3)<0$.

Задача 2. Решите уравнение $\sin^3 x-\cos^4 x=-1$.

Задача 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=xyz,\\ y^2+z^2=xyz,\\ z^2+x^2=xyz. \end{cases}$$

Задача 4. Решите уравнение

$$\left(2\log_4\left(2^{2x}+1\right)-x\right)\cdot\left(\log_2\left(2^x+2^{-x}\right)-2\right)=8.$$

Задача 5. Два круга, расстояние между центрами которых равно $\sqrt{3}+1$, имеют радиусы $\sqrt{2}$ и 2. Найдите отношение площади круга, вписанного в общую часть данных кругов, к площади общей части.

Задача 6. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\frac{y^2}{25}+\frac{\omega^2}{144}$, если величины x, y, z, ω удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y-20=0,\\ z^2+\omega^2-2\omega-143=0,\\ x\omega+yz-x+\omega+2z-61\geqslant 0. \end{cases}$$

Ответы. **1.** $(-\infty;-5)$. **2.** $\left\{\pi n; -\frac{\pi}{2}+\pi k; n,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **3.** $\{(0;0;0);(2;2;2);$ $(2;-2;-2);(-2;2;-2);(-2;-2;2)\}$. **4.** $\log_2\left(8\pm\sqrt{63}\right)$. **5.** $\frac{3\pi(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})}{7\pi-6(\sqrt{3}+1)}$. **6.** $\frac{4201}{3600}\pm\frac{\sqrt{601}}{30}$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), ИСАА, 2.

Задача 1. Решите неравенство $\sqrt{x^2-49}\cdot(x+5)<0$.

Задача 2. Решите уравнение $\cos^3 x-\sin^4 x=-1$.

Задача 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=2xyz,\\ y^2+z^2=2xyz,\\ z^2+x^2=2xyz. \end{cases}$$

Задача 4. Решите уравнение

$$(\log_3(3^{-2x}+1)+x)\cdot(2\log_9(3^{2x}+1)-x-2)=3.$$

Задача 5. Два круга, расстояние между центрами которых равно $\sqrt{3}$, имеют радиусы $\sqrt{3}$ и 3. Найдите отношение площади круга, вписанного в общую часть данных кругов, к площади общей части.

Задача 6. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\frac{x^2}{64}+\frac{z^2}{49}$, если величины x, y, z, ω удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x-4y-51=0, \\ z^2+\omega^2+2z+8\omega-32=0, \\ x\omega+yz+4x-3\omega+y-2z-70\geqslant 0. \end{cases}$$

Ответы. 1. $(-\infty;-7)$. **2.** $\left\{\pi+2\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi k; n,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **3.** $\{(0;0;0); (1;1;1); (1;-1;-1); (-1;1;-1); (-1;-1;1)\}$. **4.** $\left\{\log_3\frac{27\pm5\sqrt{29}}{2}\right\}$. **5.** $\frac{9\pi}{14\pi-6\sqrt{3}}$. **6.** $\frac{3641}{3136}\pm\frac{\sqrt{505}}{28}$.

ВАРИАНТ 2004 (апрель), социологический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение

$$\frac{x^3+7x^2+10x-3(x^2+7x)-30}{\sqrt{x+2}}=0.$$

Задача 2. Дана функция

$$y(x)=|x-3|+|2x-4|+1.$$

1. Найдите наименьшее значение функции $y(x)$. 2. Решите неравенство $y(x)>8$.

Задача 3. На факультете X отличники составляют 10% от общего количества студентов этого факультета, на факультете Y — 20%, а на факультете Z лишь 4%. Найдите средний процент отличников по всем трем факультетам, если известно, что на факультете Y учится на 50% больше студентов, чем на факультете X, а на факультете Z — вдвое меньше, чем на факультете X.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC отрезок BH является высотой, опущенной на гипотенузу, а в треугольнике BHC отрезок BL является медианой. Найдите угол LBC, если известно, что $BL = 4$ и $AH = \frac{9}{2\sqrt{7}}$.

Задача 5. Найдите все решения уравнения $\sin\sqrt{3x+\pi} = 0$, каждое из которых меньше любого решения уравнения $\cos\sqrt{x-4\pi} = 0$.

Задача 6. На плоскости Oxy изобразите фигуру, все точки которой удовлетворяют неравенству

$$2^{\frac{1}{2}\log_2 y^2} + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{3^{\frac{1}{2}\log_3 x^2} + \frac{1}{2}}.$$

Докажите, что ее площадь S удовлетворяет неравенству $2 < S < 3$.

Ответы. **1.** 3. **2.** 1. 2. 2. $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{14}{3}; +\infty\right)$. **3.** 14%. **4.** $\arccos\frac{23}{4\sqrt{37}}$. **5.** $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi^2-\pi}{3}$, $\frac{4\pi^2-\pi}{3}$.

ВАРИАНТ 2004 (апрель), социологический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$\frac{x^3 + 9x^2 + 18x - 2(x^2+9x) - 36}{\sqrt{x+3}} = 0.$$

Задача 2. Дана функция

$$y(x) = |x-2| + |2x-2| + 3.$$

1. Найдите наименьшее значение функции $y(x)$. 2. Решите неравенство $y(x) > 7$.

Задача 3. На факультете X отличники составляют 10% от общего количества студентов этого факультета, на факультете Y — 20%, а на факультете Z — 40%. Известно, что на факультете Y учится в полтора раза больше студентов, чем на факультете X, а средний процент отличников по всем факультетам составляет 20%. Какая доля всех студентов учится на факультете Z?

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC отрезок BH является высотой, опущенной на гипотенузу, а точка L делит отрезок

HC пополам. Найдите угол LBC, если известно, что $AH = \frac{2}{\sqrt{5}}$, а $BL = 3$.

Задача 5. Найдите все решения уравнения $\sin\sqrt{4x-\pi} = 0$, каждое из которых меньше любого решения уравнения $\cos\sqrt{x-3\pi} = 0$.

Задача 6. На плоскости Oxy изобразите фигуру, все точки которой удовлетворяют неравенству

$$\left(3^{\frac{1}{2}\log_3 y^2} + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(2^{\frac{1}{2}\log_2 x^2} + \frac{1}{2}\right) \leqslant 1.$$

Докажите, что ее площадь S удовлетворяет неравенству $2 < S < 3$.

Ответы. 1. 3. **2.** а) 4, б) $(-\infty;0)\cup\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$. **3.** $\frac{1}{6}$. **4.** $\arccos\frac{7}{54}$. **5.** $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi^2+\pi}{4}$, $\frac{4\pi^2+\pi}{4}$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), социологический факультет, 1.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{x^2+8x+15}{x^2+7x+14} \leqslant 0.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$4\sin^2 3x - 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos^2(x-\pi) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}.$$

Задача 3. Популярность продукта А за 2002 год выросла на 20%, в следующем году снизилась на 10%, а в конце 2004 года сравнялась с популярностью продукта Б. Популярность продукта Б в 2002 году снизилась на 20%, затем на протяжении одного года не изменилась, а за 2004 год выросла на 40%. Как изменилась популярность продукта А за 2004 год, если в начале 2002 года она составляла $\frac{2}{3}$ от популярности продукта Б?

Задача 4. В треугольнике ABC угол при вершине В равен $\frac{\pi}{3}$, а длины отрезков, соединяющих центр вписанной окружности с вершинами A и C, равны 4 и 6 соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Задача 5. Три числа, являющиеся длинами ребер прямоугольного параллелепипеда с диагональю 6, образуют арифметическую прогрессию. Кубы этих чисел тоже образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

Задача 6. Для каждого положительного значения параметра c изобразите множество тех пар $(b; a)$, для каждой из которых уравнение

$$bx^2 + ax - \frac{b}{4} + c = 0$$

имеет два различных отрицательных корня, и укажите все значения параметра a, при каждом из которых множество соответствующих значений b состоит из двух непересекающихся интервалов.

Ответы. **1.** $[-5; -3]$. **2.** $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$. **3.** выросла на $\frac{500}{9}\%$. **4.** $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. **5.** $2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$. **6.** $a \in (0; 2c)$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), социологический факультет, 2.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 2x + 15} \leqslant 0.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$4\sin^2 3x - 2\cos^2(x - \pi) - \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Задача 3. Популярность продукта А за 2002 год выросла на 10%, в следующем году снизилась на 20%, а в конце 2004 года сравнялась с популярностью продукта Б. Популярность продукта Б в 2002 году выросла на 20%, затем на протяжении одного года не изменялась, а за 2004 год снизилась на 10%. Как изменилась популярность продукта А за 2004 год, если в начале 2002 года она составляла $\frac{3}{4}$ от популярности продукта Б?

Задача 4. В треугольнике ABC угол при вершине В равен $\frac{\pi}{2}$, а длины отрезков, соединяющих центр вписанной окружности с вершинами A и C, равны 3 и $\sqrt{2}$ соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Задача 5. Три числа, являющиеся длинами ребер прямоугольного параллелепипеда с диагональю $2\sqrt{6}$, образуют арифметическую прогрессию. Кубы этих чисел тоже образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

Задача 6. Для каждого положительного значения параметра c изобразите множество тех пар $(b; a)$, для каждой из которых уравнение

$$-2ax^2 - bx + c + \frac{a}{8} = 0$$

имеет два различных отрицательных корня, и укажите все значения параметра b, при каждом из которых множество соответствующих значений a является интервалом.

Ответы. 1. $[-3; 5]$. **2.** $\pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$. **3.** Выросла на $\frac{700}{11}\%$. **4.** $\frac{3}{\sqrt{17}}$. **5.** $2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$. **6.** $b > 4c$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), факультет государственного управления, 1.

Задача 1. Тест, который должен пройти испытуемый, состоит из 26 вопросов. За каждый неверный ответ у испытуемого вычитается пять очков, а за каждый правильный начисляется восемь очков. Испытуемый дал ответы на все вопросы. На сколько вопросов он ответил правильно, если в итоге сумма полученных им очков оказалась равной нулю?

Задача 2. Решите уравнение $\sin 2x - 2\cos 4x + \sin 6x = 2$.

Задача 3. Длины трех сторон четырехугольника, вписанного в окружность радиуса $2\sqrt{2}$, одинаковы и равны 2. Найдите длину четвертой стороны.

Задача 4. Компания предложила 350 своим служащим выполнить сверхурочную работу, причем каждому мужчине предлагалось в виде вознаграждения 20 долларов, а каждой женщине — 16 долларов 30 центов. Все женщины согласились с этим предложением, а часть мужчин отказалась. Общая сумма выплаченного вознаграждения составила 5705 долларов. Какова сумма вознаграждения, выплаченного всем женщинам?

Задача 5. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\min\left(\log_3(3x+5), \sqrt{x^2 - x - 2}\right) < 2.$$

Задача 6. Каково минимальное число гирь, необходимых для того, чтобы взвесить любой груз массой от 1 до 39 килограммов на рычажных (чашечных) весах, если известно, что этот груз может весить только целое число килограммов?

Задача 7. На плоскости Oxy найдите наибольшее расстояние между такими двумя точками с координатами $(x; y)$, что x и y являются целыми числами и удовлетворяют уравнению

$$4 \cdot \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{15}{xy}.$$

Ответы. **1.** 10. **2.** $\{\pi/4 + \pi k/2; k \in \mathbb{Z}\}$. **3.** 5. **4.** 2445 долларов. **5.** $(-5/3; -1] \cup [2; 3)$. **6.** Четыре; с помощью гирь 1, 3, 9, 27 кг. **7.** $2\sqrt{65}$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), факультет государственного управления, 2.

Задача 1. Фирма совершала сделки по покупке и продаже автомобилей одной марки, покупая один автомобиль по 7000 у. е. и продавая по 9000 у. е. Всего по этим сделкам за день прошли 32 автомобиля. Сколько автомобилей фирма продала, если по итогам дня у нее образовался нулевой баланс?

Задача 2. Решите уравнение $\cos 3x - 2\cos 6x - \cos 9x = -2$.

Задача 3. Длины трех сторон четырехугольника, вписанного в окружность радиуса 2, совпадают и равны $\sqrt{2}$. Найдите длины его диагоналей.

Задача 4. Брокерская фирма выставила на торги акции двух компаний: нефтяной компании — по 100 долларов за акцию и газовой компании — по 65 долларов 60 центов за акцию. Всего было 200 акций. Все акции газовой компании были проданы, а часть акций нефтяной компании осталась непроданной. Общая сумма выручки оказалась равной 13120 долларов. Найдите сумму выручки, полученной за акции газовой компании.

Задача 5. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\max\left(\log_2(x+3), \sqrt{2x^2 + x - 9}\right) > 1.$$

Задача 6. Каково минимальное число гирь, необходимых для того, чтобы взвесить любой груз массой от 2 до 40 килограммов на рычажных (чашечных) весах, если известно, что этот груз может весить только целое число килограммов?

Задача 7. На плоскости Oxy найдите наименьшее расстояние между такими двумя точками с координатами $(x; y)$, что x и y являются целыми числами и удовлетворяют уравнению

$$9 \cdot \frac{y}{x} - \frac{x}{y} + \frac{55}{xy} = 0.$$

Ответы. **1.** 14. **2.** $\left\{\frac{\pi k}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$. **3.** $\sqrt{7}$. **4.** 4920 долларов. **5.** $\left(-3; -\frac{5}{2}\right) \cup \cup \left[\frac{\sqrt{73}-1}{4}; +\infty\right)$. **6.** Четыре; с помощью гирь 1, 3, 9, 27 кг. **7.** 2.

ВАРИАНТ 2004 (июль), высшая школа бизнеса, 1.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{x+1}{|x-1|} \geqslant 1.$$

Задача 2. Решите уравнение $\log_3(3\sin x) + \log_{\frac{1}{3}}(\cos x) = 1$.

Задача 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{y-2} = 1, \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$$

Задача 4. Найдите периметр треугольника ABC, если известны координаты его вершин $A(-3; 5)$, $B(3; -3)$ и точки $M(6; 1)$, являющейся серединой стороны BC.

Задача 5. Сколько времени в течение суток на электронном табло вокзальных часов, которые показывают время в диапазоне от 00:00 до 23:59, присутствует хотя бы одна цифра 3?

Задача 6. Найдите все пары целых неотрицательных чисел $(k; m)$, являющихся решениями уравнения $2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36$.

Задача 7. Найдите наибольшее значение выражения $3x - 2y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию $4x^2 + y^2 = 16$.

Задача 8. Найдите все значения параметра $p \in [-4, 4]$, при которых неравенство

$$(p-2) \cdot \big((x+1)(p-3) + 2x\big) > 0$$

выполняется при любых $x \geqslant 0$.

Ответы. **1.** $[0; 1) \cup (1; +\infty)$. **2.** $\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}\right\}$. **3.** $\{(26; -6); (-9; 29)\}$. **4.** 32. **5.** 8 час 15 мин. **6.** $\{(9; 9)\}$. **7.** 10. **8.** $p \in [-4; 1] \cup (3; 4]$.

ВАРИАНТ 2004 (июль), высшая школа бизнеса, 2.

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{2-x}{|x+2|} \geqslant 1.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}(2\sin x) + \log_2(\sqrt{3}\cos x) = -1.$$

Задача 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{y+2} = 1, \\ x - y = 22. \end{cases}$$

Задача 4. Найдите периметр треугольника KLM, если известны координаты его вершин $K(-4;-3)$, $L(2;5)$ и точки $P(5;1)$, являющейся серединой стороны LM.

Задача 5. Сколько времени в течение суток на электронном табло вокзальных часов, которые показывают время в диапазоне от 00:00 до 23:59, присутствует хотя бы одна цифра 5?

Задача 6. Найдите все пары целых неотрицательных чисел $(m;n)$, являющихся решениями уравнения

$$2m^2 + 3m = 2nm + n + 41.$$

Задача 7. Найдите наименьшее значение выражения $2x - 4y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Задача 8. Найдите все значения параметра $a \in [-6, 6]$, при которых неравенство

$$(a+3) \cdot \big((x+1)(a+2) + 3x\big) > 0$$

выполняется при любых $x \geqslant 0$.

Ответы. **1.** $(-\infty;-2) \cup (-2;0]$. **2.** $\{\pi/3 + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}\}$. **3.** $\{(28;6); (-7;-29)\}$. **4.** 32. **5.** 7 час 30 мин. **6.** $\{(10;9)\}$. **7.** -10. **8.** $a \in [-6;-5] \cup$ $\cup (-2;6]$.

§2.3. Варианты 2005 года

ВАРИАНТ 2005 (май), «Ломоносов–2005»[1], 1.

Задача 1. Вычислите

$$\frac{(x-y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2} - \frac{2xy(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2}$$

при

$$x = 1,\underbrace{2\ldots 22}_{46}, \quad y = -2,\underbrace{7\ldots 77}_{45}8.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{3\cdot 2^{1-x}+1}{2^x-1} \geqslant \frac{1}{1-2^{-x}}.$$

Задача 3. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC = 5$, если расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

Задача 4. Решите уравнение $\log_4(4\sin^2 2x) = 2 - \log_2(-2\operatorname{tg} x)$.

Задача 5. На окружности взята точка A, на её диаметре BC — точки D и E, а на его продолжении за точку B — точка F. Найдите BC, если $\angle BAD = \angle ACD$, $\angle BAF = \angle CAE$, $BD = 2$, $BE = 5$ и $BF = 4$.

Задача 6. Решите неравенство $5|x| \leqslant x\,(3x + 2 - 2\sqrt{8-2x-x^2})$.

Задача 7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 12 и 13, а её высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие 30°. Какой наибольший объём может иметь такая пирамида?

Задача 8. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4x - \big|3x - |x+a|\big| = 9|x-1|$$

имеет хотя бы один корень.

Задача 9. Группа отдыхающих в течение 2 ч 40 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды)

[1] Эта олимпиада состоялась на факультетах: механико-математическом, ВМиК, химическом, геологическом, почвоведения, физическом, экономическом, наук о материалах.

попеременно то по течению, то против: в каждую сторону — в общей сложности не менее чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 40 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 10 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость её течения?

Задача 10. При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством

$$3|x|^n + |8y|^n + |z^n| < 1,$$

а тело Φ — объединение всех тел Φ_n. Найдите объём тела Φ.

Ответы. **1.** 64. **2.** $x \in (0; \log_2 3]$. **3.** $S_{ABCD} = 25$. **4.** $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **5.** $BC = 11$. **6.** $x \in \left[-4; \frac{\sqrt{404}-25}{13}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{23}{13}; 2\right]$. **7.** $V = 150\sqrt{3}$. **8.** $a \in [-8; 6]$. **9.** От A к B; 8 км/ч. **10.** 1.

ВАРИАНТ 2005 (май), «Ломоносов–2005», 2.

Задача 1. Вычислите

$$\frac{2xy(x^3+y^3)}{x^2-xy+y^2} + \frac{(x+y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2}$$

при

$$x = -1,\underbrace{6\ldots66}_{44}7, \quad y = -1,\underbrace{3\ldots33}_{45}.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{1}{5^{-x}-1} \geqslant \frac{2-3\cdot 5^{1-x}}{5^x-1}.$$

Задача 3. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $CD = 3$, если расстояния от вершин A и B до прямой CD равны 5 и 7 соответственно.

Задача 4. Решите уравнение $\log_4(4\operatorname{ctg}^2 x) - \log_2(-2\sin 2x) = 1$.

Задача 5. На диаметре AB окружности взяты точки C и D, на его продолжении за точку B — точка E, а на окружности — точка F, причём $\angle AFC = \angle BFE$, $\angle DAF = \angle BFD$, $AB = 8$, $CB = 6$ и $DB = 5$. Найдите BE.

Задача 6. Решите неравенство $x\,(3x + 2 - 2\sqrt{3-2x-x^2}) \geqslant 3|x|$.

Задача 7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 9, 12 и 15, а её высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие $60°$. Какой наибольший объём может иметь такая пирамида?

Задача 8. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\big||x-a|+2x\big|+4x=8|x+1|$$

не имеет ни одного корня.

Задача 9. Группа отдыхающих в течение 2 ч 30 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону — в общей сложности не менее чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 30 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 6 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость её течения?

Задача 10. При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством

$$|2x|^n+|y|^n+7|z|^n<1,$$

а тело Φ — объединение всех тел Φ_n. Найдите объём тела Φ.

Ответы. **1.** -27. **2.** $x\in(0;\log_5 3]$. **3.** $S_{ABCD}=18$. **4.** $-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **5.** $BE=10$. **6.** $x\in\left[-3;\frac{\sqrt{192}-19}{13}\right]\cup\{0\}\cup\left[\frac{11}{13};1\right]$. **7.** $V=108\sqrt{3}$. **8.** $a\in(-7;5)$. **9.** От A к B; 5 км/ч. **10.** 4.

ВАРИАНТ 2005 (май), «Ломоносов–2005», 3.

Задача 1. Вычислите

$$\frac{2xy(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2}-\frac{(x-y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2}$$

при

$$x=-3,\underbrace{1\ldots11}_{43}2,\quad y=1,\underbrace{8\ldots88}_{44}.$$

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{3\cdot7^{1-x}-4}{1-7^x}\leqslant\frac{1}{7^{-x}-1}.$$

Задача 3. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $AD = 7$, если расстояния от вершин B и C до прямой AD равны 3 и 5 соответственно.

Задача 4. Решите уравнение $\log_4(4\operatorname{tg}^2 x) + 1 - \log_2(-8\sin 2x) = 0$.

Задача 5. На отрезке AB взяты точки C, D и E, а на окружности с диаметром AE — точка F. Найдите AB, если известно, что $\angle AFC = \angle BFE$, $\angle DAF = \angle DFE$, $AC = 1$, $AD = 3$ и $AE = 9$.

Задача 6. Решите неравенство $3|x| \leqslant x\,(3x + 2 - 2\sqrt{6 + x - x^2})$.

Задача 7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 6, 8 и 10, а её высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие 45°. Какой наибольший объём может иметь такая пирамида?

Задача 8. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\big||x + a| - 2x\big| - 3x = 7|x - 1|$$

имеет не более одного корня.

Задача 9. Группа отдыхающих в течение 2 ч 15 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону — в общей сложности не менее чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 45 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 5 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость её течения?

Задача 10. При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством

$$|x|^n + 5|y|^n + |4z|^n < 1,$$

а тело Φ — объединение всех тел Φ_n. Найдите объём тела Φ.

Ответы. **1.** -125. **2.** $x \in (0; \log_7 3]$. **3.** $S_{ABCD} = 28$. **4.** $-\pi/3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **5.** $AB = 12$. **6.** $x \in [-2; (2\sqrt{39} - 13)/13] \cup \{0\} \cup [23/13; 3]$. **7.** $V = 96$. **8.** $a \in [-6; 4]$. **9.** От A к B; 4,5 км/ч. **10.** 2.

ВАРИАНТ 2005 (июль), механико-математический факультет, 1.

Задача 1. Согласно расписанию, автобус курсирует по маршруту из пункта A в пункт B и обратно с постоянной скоростью и без остановок. На пути из A в B он был вынужден на некоторое время остановиться, поэтому на обратном пути увеличил скорость на 25%. Приехав в A с 10-минутным отклонением от расписания, он уменьшил свою последнюю скорость на 24% и прибыл в B вовремя. Какова была продолжительность вынужденной остановки?

Задача 2. Найдите $\log_2 \frac{2x}{2^x}$ при условии

$$|\log_{\sqrt{2}} x^{x/2} - 2\log_2 x| + \big||2-x| - |\log_2 x|\big| \leqslant (x-2)\log_8 x^3.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$\frac{3 - x - \sqrt{5-x^2}}{\cos\frac{2x-7}{4} - \cos\frac{x-5}{4}} \geqslant 0.$$

Задача 4. На основании BC трапеции $ABCD$ взята точка E, лежащая на одной окружности с точками A, C и D. Другая окружность, проходящая через точки A, B и C, касается прямой CD. Найдите BC, если $AB = 12$ и $BE : EC = 4 : 5$. Найдите все возможные значения отношения радиуса первой окружности к радиусу второй при данных условиях.

Задача 5. Пусть X — сумма корней уравнения

$$a\cos x = \sqrt{2} + 2\cos(x + \pi/3)$$

на промежутке $[0; 2\pi)$, а Y — сумма корней уравнения

$$a\cos 2y - 2\sin 2y = a - 3\sin y$$

на том же промежутке. Найдите все значения a, при которых

$$\operatorname{ctg}((X-Y)/2) = \sqrt{3}.$$

Задача 6. Найдите объём тетраэдра $ABCD$ с ребрами $AB = 3$, $AC = 5$ и $BD = 7$, если расстояние между серединами M и N его ребёр AB и CD равно 2, а прямая AB образует равные углы с прямыми AC, BD и MN.

Ответы. **1.** 28. **2.** -1. **3.** $x \in [1; 2) \cup (2; \sqrt{5})$. **4.** 18, $(1/3; 1) \cup (1; 5/3)$. **5.** 0, $4 + 2\sqrt{3}$. **6.** $4\sqrt{6}$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), механико-математический факультет, 2.

Задача 1. Согласно расписанию, автобус курсирует по маршруту из пункта A в пункт B и обратно с постоянной скоростью и без остановок. На пути из A в B он был вынужден на некоторое время остановиться, поэтому на обратном пути увеличил скорость на 30%. Приехав в A с 4-минутным отклонением от расписания, он уменьшил свою последнюю скорость на 25% и прибыл в B вовремя. Какова была продолжительность вынужденной остановки?

Задача 2. Найдите $\log_3 \frac{3^x}{3x}$ при условии

$$\big||\log_3 x| - |3-x|\big| \leqslant (x-3)\log_{\sqrt{3}} x^{1/2} - |3\log_3 x - \log_9 x^{2x}|.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$\frac{4-x-\sqrt{10-x^2}}{\sin\frac{x-2}{8} - \sin\frac{2x-5}{8}} \leqslant 0.$$

Задача 4. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Другая окружность, проходящая через точки A и C, касается прямой CD и пересекает в точке E продолжение основания $BC = 7$ за точку B. Найдите BE, если $AE = 12$. Найдите все возможные значения отношения радиуса первой окружности к радиусу второй при данных условиях.

Задача 5. Пусть X — сумма корней уравнения

$$2\sin x + a\cos 2x = a + \sin x$$

на промежутке $[-\pi;\pi)$, а Y — сумма корней уравнения

$$2\sqrt{3}\sin(y-\pi/3) = 1 + a\cos y$$

на том же промежутке. Найдите все значения a, при которых

$$\operatorname{tg}((X-Y)/2) = -\sqrt{3}.$$

Задача 6. Найдите объём тетраэдра $ABCD$ с ребрами $AB = 5$, $AC = 1$ и $CD = 7$, если расстояние между серединами M и N его ребёр AC и BD равно 3, а прямая AC образует равные углы с прямыми AB, CD и MN.

Ответы. **1.** 32. **2.** 2. **3.** $x \in [1;3) \cup (3;\sqrt{10})$. **4.** 18, $(1/3;1) \cup (1;5/3)$. **5.** 0, $-4-2/\sqrt{3}$. **6.** $2\sqrt{6}$.

ВАРИАНТ 2005, механико-математический факультет, задачи устного экзамена.

Задача 1. Функция f с областью определения $\mathbb{Z}$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} f(1) = \cos 1, \\ f(n+1) = f(n) \cdot \cos 1 - \sin n \cdot \sin 1, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Для любого ли натурального (целого) n верно неравенство $f(n) > -1$?

Задача 2. Найдите наименьшее значение функции f, определённой на множестве натуральных чисел и удовлетворяющей равенствам $f(1) = \cos 2$, $f(n+1) = f(n) \cdot \cos 1 - \sqrt{1 - f^2(n)} \cdot \sin 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Задача 3. Пусть q и d — соответственно наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель натуральных чисел x и y. Найдите наименьшее значении величины $q : d$ при условии $3x = 8y - 29$.

Задача 4. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$\left(\frac{45}{8}\right)^{x^3-4x^2+2y+6} = \left(\frac{162}{5}\right)^{y^3-4y^2+2x-1}.$$

Ответы. 1. Да. **2.** $\cos 3$. **3.** 4. **4.** $x = 2$, $y = 1$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), факультет вычислительной математики и кибернетики, 1.

Задача 1. Решите неравенство

$$\log_2\left(\frac{x^2 + |x-3| + 3}{x+1}\right)^2 - |\log_2 x - 2| > \log_2 x + 2.$$

Задача 2. Решите уравнение $\sqrt{\operatorname{ctg} x + 1} = \sqrt{15} \cdot \sin x$.

Задача 3. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, являются арифметическими прогрессиями, $a_{11} = 32$, $b_{21} = 43$. Последовательность $\{c_n\}$ определяется равенствами $c_n = (-1)^n \cdot a_n + (-1)^n \cdot b_n$. Сумма первых сорока членов последовательности $\{c_n\}$ равна 100, а сумма первых её двадцати трёх членов равна -60. Найдите b_{40} и сумму первых ста членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$.

Задача 4. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle AMD = \angle ADB$ и $\angle ACM = \angle ABC$. Утроенный квадрат отношения расстояния от точки A до прямой CD к расстоянию от точки C до прямой AD равен 2, $CD = 20$. Найдите радиус вписанной в треугольник ACD окружности.

Задача 5. Найдите все значения параметра a, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$, при которых уравнение $\sin^5(3x + a) = \cos(\pi \cdot [x])$ имеет на отрезке $[1;\pi]$ нечётное число решений. (Здесь $[x]$ — целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $[x] \leqslant x$.)

Задача 6. На гранях ABC, ABD, ACD и BCD тетраэдра $ABCD$ выбраны соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel CD$, $KM \parallel BD$, $KN \parallel AD$. Отношение объёма тетраэдра $ABCD$ к объёму тетраэдра $KLMN$ равно 64. Известно, что $2(AD \cdot KM + BD \cdot KN) = AD \cdot BD$. Найдите отношение площадей треугольников ABD и KMN.

Ответы. **1.** $(0;(5-\sqrt{17})/2)$. **2.** $\pi + \operatorname{arcctg} 2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **3.** $S_{100} = 15050$, $b_{40} = 81$. **4.** $4\sqrt{10} - 2\sqrt{15}$. **5.** $a \in [\pi/2; 3\pi/2 - 3] \cup (5\pi/2 - 6; 7\pi/2 - 9]$. **6.** 32.

ВАРИАНТ 2005 (июль), факультет вычислительной математики и кибернетики, 2.

Задача 1. Решите неравенство

$$2\log_{1/3}\left(\frac{x^2 + |x-7| + 7}{x+1}\right) + |\log_3 x - 2| < -\log_3 x - 2.$$

Задача 2. Решите уравнение $\sqrt{\operatorname{tg} x + 3} = 5 \cdot \cos x$.

Задача 3. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, являются арифметическими прогрессиями, $a_{12} = 25$, $b_9 = 37$. Последовательность $\{c_n\}$ определяется равенствами $c_n = (-1)^{n+1} \cdot a_n + (-1)^{n+1} \cdot b_n$. Сумма первых пятидесяти членов последовательности $\{c_n\}$ равна 50, а сумма первых её двадцати девяти членов равна -30. Найдите a_{35} и сумму первых девяноста членов арифметической прогрессии $\{b_n\}$.

Задача 4. На стороне KL выпуклого четырёхугольника $KLMN$ выбрана точка A так, что $\angle ANK = \angle KLN$ и $\angle AMK = \angle KLM$. Утроенный квадрат отношения расстояния от точки K до прямой MN к расстоянию от точки M до прямой KN равен 2, $MN = 15$. Найдите радиус описанной около треугольника KMN окружности.

Задача 5. Найдите все значения параметра a, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$, при которых уравнение $\cos^3(2x+a) = |\sin(\pi\cdot[x]/2)|$ имеет на отрезке $[1;\pi]$ нечётное число решений. (Здесь $[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $[x] \leqslant x$.)

Задача 6. В тетраэдре $KLMN$ на гранях KLM, KLN, KMN и LMN выбраны соответственно точки A, B, C и D так, что $AB \parallel MN$, $AC \parallel LN$, $AD \parallel KN$. Отношение площадей треугольников KLN и ACD равно 36. Известно, что $2(KN\cdot AC + LN\cdot AD) = KN\cdot LN$. Найдите отношение объёмов тетраэдров $KLMN$ и $ABCD$.

Ответы. **1.** $(0;5-2\sqrt{5})$. **2.** $\operatorname{arctg} 2+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **3.** $S_{90}=16470$, $a_{35}=71$. **4.** $R=2\sqrt{15}$. **5.** $a\in\left(2\pi-6;\frac{3\pi}{2-4}\right]\cup\left(\frac{5\pi}{2-6};2\pi-4\right)$. **6.** 72.

ВАРИАНТ 2005 (июль), факультет вычислительной математики и кибернетики (отделение бакалавров), 1.

Задача 1. В убывающей арифметической последовательности разность девятого и четвёртого членов равна третьему, а сумма квадратов первого и второго членов равна 4. Найдите сумму первых двадцати пяти членов этой прогрессии.

Задача 2. Решите неравенство

$$\log_3\left(\frac{x^2+|2x-5|+5}{x+2}\right) - |\log_3 x - 1| > \log_3 x + 1.$$

Задача 3. Решите уравнение $\sqrt{6\cdot\operatorname{ctg} x - 8} = 1/\sin x$.

Задача 4. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \arccos\frac{x+y}{4} = \arccos\frac{5xy}{24}, \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$$

Задача 5. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle AMD = \angle ADB$ и $\angle ACM = \angle ABC$. Квадрат отношения расстояния от точки A до прямой CD к расстоянию от точки C до прямой AD равен 2, $CD = 28$. Найдите радиус вписанной в треугольник ACD окружности.

Задача 6. Найдите все значения параметра a, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$, при которых уравнение $\sin^3(3x+a) = \sin(\pi/2-\pi\cdot[x])$ имеет на отрезке $[1;\pi]$ ровно два решения. (Здесь $[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $[x] \leqslant x$.)

Задача 7. На гранях ABC, ABD, ACD и BCD тетраэдра $ABCD$ выбраны соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel CD$, $KM \parallel BD$, $KN \parallel AD$. Отношение объёма тетраэдра $ABCD$ к объёму тетраэдра $KLMN$ равно 50. Известно, что $2(AD \cdot KM + BD \cdot KN) = AD \cdot BD$. Найдите отношение площадей треугольников ABD и KMN.

Ответы. **1.** -150. **2.** $(0;1)$. **3.** $\operatorname{arcctg} 3 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **4.** $(x;y) = \big((-13-\sqrt{481})/10; (-13+\sqrt{481})/10\big)$, $\big((-13+\sqrt{481})/10; (-13-\sqrt{481})/10\big)$. **5.** $4\sqrt{14} - 2\sqrt{7}$. **6.** $a \in [0;\pi/2) \cup (3\pi/2 - 3; 5\pi/2 - 6]$. **7.** 25.

ВАРИАНТ 2005 (июль), факультет вычислительной математики и кибернетики (отделение бакалавров), 2.

Задача 1. В убывающей арифметической последовательности сумма второго и десятого членов равна пятому члену, а сумма квадратов первого и третьего членов равна 13. Найдите сумму первых восьми членов этой прогрессии.

Задача 2. Решите неравенство

$$\log_{1/\sqrt{2}}\left(\frac{x^2 + |2x-9| + 9}{x+2}\right) + |\log_2 x - 3| < -\log_2 x - 3.$$

Задача 3. Решите уравнение $\sqrt{6 \cdot \operatorname{tg} x + 8} = -3/\cos x$.

Задача 4. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \arcsin \frac{x+y}{5} = \arcsin \frac{3(x^2+y^2)}{125}, \\ xy = -7. \end{cases}$$

Задача 5. На стороне KL выпуклого четырёхугольника $KLMN$ выбрана точка A так, что $\angle KAN = \angle KNL$ и $\angle AMK = \angle KLM$. Квадрат отношения расстояния от точки K до прямой MN к расстоянию от точки M до прямой KN равен 2, $MN = 7$. Найдите радиус описанной около треугольника KMN окружности.

Задача 6. Найдите все значения параметра a, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$, при которых уравнение $\cos(2x+a) = \cos^2(\pi \cdot ([x]+1)/2)$ имеет на отрезке $[1;\pi]$ ровно два решения. (Здесь $[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $[x] \leqslant x$.)

Задача 7. В тетраэдре $KLMN$ на гранях KLM, KLN, KMN и LMN выбраны соответственно точки A, B, C и D так, что $AB \parallel MN$, $AC \parallel LN$, $AD \parallel KN$. Отношение площадей треугольников KLN и ACD равно 20. Известно, что $2(KN \cdot AC + LN \cdot AD) = KN \cdot LN$. Найдите отношение объёмов тетраэдров $KLMN$ и $ABCD$.

Ответы. **1.** 10. **2.** $(0; 5-\sqrt{23})$. **3.** $\pi + \operatorname{arctg}(1/3) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **4.** $(x; y) = \big((7-\sqrt{301})/6; (7+\sqrt{301})/6\big)$, $\big((7+\sqrt{301})/6; (7-\sqrt{301})/6\big)$. **5.** $R = 2\sqrt{7}$. **6.** $a \in [0; 2\pi - 6] \cup [2\pi - 4; \pi]$. **7.** 40.

ВАРИАНТ 2005 (июль), физический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение $2\cos 2x \cdot \cos 7x - \cos 4x = 1$.

Задача 2. Решите неравенство $\sqrt{5x - x^2 + 6} < \sqrt{6} - x$.

Задача 3. Решите уравнение $5^{x\sqrt{12}} - 5\sqrt{3} \cdot 15^{x\sqrt{3}} + 4 \cdot 3^{1+x\sqrt{12}} = 0$.

Задача 4. На окружности взяты последовательно точки P, Q, R и S, $PQ = PS$. Отрезки PR и QS пересекаются в точке T, $RQ = q$, $RS = s$, $RT = t$. Найдите PT.

Задача 5. Решите систему

$$\begin{cases} x + 4\sqrt{x-y} = y + 12, \\ |2(x+1) + y| + 2|2x + (y-1)| = 3. \end{cases}$$

Задача 6. Вершина M прямого угла в $\triangle LMN$ лежит внутри окружности с центром O и радиусом 8, проходящей через концы гипотенузы LN, MN — высота $\triangle LMN$. На прямой LN взята точка K так, что $KH = OH$. Найдите MK.

Задача 7. Для каждого допустимого значения a решите неравенство

$$\log_{ax}\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \log_{a^2-2}(a-1) < 0.$$

Задача 8. В правильной треугольной пирамиде $SKLM$ с вершиной S точка N — середина отрезка KL, $SN = \sqrt{17}$. Сфера, проходящая через точки L, M и N, касается ребра SK в такой точке P, что $KP : PS = 1 : 2$. Найдите высоту SH пирамиды $SKLM$.

Ответы. **1.** $\pi/4 + \pi k/2$, $2\pi m/5$, $2\pi n/9$, $k, m, n \in \mathbb{Z}$. **2.** $[-1; 0)$. **3.** $(1/\sqrt{3})\log_{5/3}\sqrt{3}$, $(1/\sqrt{3})\log_{5/3} 4\sqrt{3}$. **4.** $(qs - t^2)/t$. **5.** $x = 5/3$, $y = -7/3$. **6.** 8. **7.** Если $a = 2$, то решений нет; если $a \in (\sqrt{2}; \sqrt{3})$, то $x > 1/a$; если $a \in (\sqrt{3}; 2) \cup (2; +\infty)$, то $0 < x < 1/a$. **8.** $5\sqrt{6}/3$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), физический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение $1-2\sin 3x\cdot\sin 4x=\cos 6x$.

Задача 2. Решите неравенство $\sqrt{3x-x^2+10}<\sqrt{10}-x$.

Задача 3. Решите уравнение $3^{x\sqrt{28}}-3\sqrt{7}\cdot 21^{x\sqrt{7}}+2\cdot 7^{1+x\sqrt{28}}=0$.

Задача 4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, $AD=DC$, диагонали AC и BD пересекаются в точке E, $BA=a$, $BC=c$, $BD=d$. Найдите ED.

Задача 5. Решите систему

$$\begin{cases} y+2\sqrt{x+y}=15-x,\\ |x-2(2y+1)|+3|x-4(y-1)|=6. \end{cases}$$

Задача 6. Окружность радиуса 5 с центром O проходит через концы A и B гипотенузы $\triangle ABC$ так, что вершина C прямого угла оказывается вне окружности, CH — высота $\triangle ABC$. На прямой AB взята точка D так, что $DH=OH$. Найдите CD.

Задача 7. Для каждого допустимого значения a решите неравенство

$$\log_{a-2}(a^2-5)\cdot\log_{x/a}\left(\frac{a}{3}\right)<0.$$

Задача 8. В правильной треугольной пирамиде $SBCD$ с вершиной S высота равна 7, точка A — середина отрезка BD. Сфера, проходящая через точки A, B и C, касается ребра SD в такой точке E, что $SE:ED=2:1$. Найдите апофему пирамиды $SBCD$.

Ответы. **1.** $\pi k/3,\ 2\pi m,\ \pi/7+2\pi n/7,\quad k,m,n\in\mathbb{Z}$. **2.** $[-2;0)$. **3.** $(1/\sqrt{7})\log_{3/7}\sqrt{7}$, $(1/\sqrt{7})\log_{3/7}2\sqrt{7}$. **4.** $(d^2-ac)/d$. **5.** $x=32/5$, $y=13/5$. **6.** 5. **7.** Если $a=\sqrt{6}$, то решений нет; если $a\in(\sqrt{5};\sqrt{6})$, то $x>a$; если $a\in(\sqrt{6};3)\cup(3;+\infty)$, то $0<x<a$. **8.** $7\sqrt{102}/10$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), химический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение $|2x+1|=|x+2|$.

Задача 2. Решите неравенство $\sqrt{3}\cdot 4^x=\sqrt{2}\cdot 9^x$.

Задача 3. Решите уравнение $\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}4x+\cos 5x$.

Задача 4. Найдите число сторон выпуклого n-угольника, если известно, что каждый его внутренний угол не менее 143° и не более 146°.

Задача 5. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\sqrt{2x-y-3}+\sqrt{2y-x+3}=2\sqrt{3-x-y}.$$

Задача 6. При каких значениях параметра a уравнение

$$|x|+\left|\frac{x+1}{3x-1}\right|=a$$

имеет ровно три решения?

Ответы. **1.** ± 1. **2.** $[1/4; +\infty)$. **3.** $\pi/10+\pi n/5$, $n\in\mathbb{Z}$. **4.** 10. **5.** $x=2$, $y=0$. **6.** $a=2$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), химический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение $|2x-1|=|x-2|$.

Задача 2. Решите неравенство $\sqrt{5}\cdot 9^x \leqslant \sqrt{3}\cdot 25^x$.

Задача 3. Решите уравнение $\operatorname{tg} 8x-\operatorname{tg} 3x=\sin 5x$.

Задача 4. Найдите число сторон выпуклого n-угольника, если известно, что каждый его внутренний угол не менее 151° и не более 153°.

Задача 5. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\sqrt{2x+y-4}+\sqrt{5-x-2y}=2\sqrt{2-x+y}.$$

Задача 6. При каких значениях параметра a уравнение

$$|x|+\left|\frac{2x-1}{3x-2}\right|=a$$

имеет ровно три решения?

Ответы. **1.** ± 1. **2.** $(-\infty; 1/4]$. **3.** $\pi n/5$, $n\in\mathbb{Z}$. **4.** 13. **5.** $x=2$, $y=1$. **6.** $a=2/3$, $a=2$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), биологический факультет, факультет биоинженерии и биоинформатики, факультет фундаментальной медицины, факультет наук о материалах, 1.

Задача 1. Решите уравнение $x^2+2|x|-3=0$.

Задача 2. Решите уравнение $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

Задача 3. Диагонали трапеции равны 12 см и 6 см, а сумма длин оснований равна 14 см. Найдите площадь трапеции.

Задача 4. Решите неравенство $\sqrt{x-1} < 3 - x$.

Задача 5. На беговой дорожке стадиона длиной 400 м одновременно со старта в одном направлении начинают забег два спортсмена на дистанцию 10 км. Каждый из них бежит со своей постоянной скоростью. Первый спортсмен приходит на финиш на 16 мин 40 с раньше второго и через 43 мин 20 с после того, как он второй раз на дистанции (не считая момента старта) обогнал второго спортсмена. Известно, что скорость первого спортсмена больше 100 м/мин. Сколько всего раз первый спортсмен обгонял второго на дистанции после старта?

Задача 6. Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2-2x-22y+122} = 2\sqrt{37} - \sqrt{x^2+y^2+2x+2y+2},\\ \log_{x+1} 4 + \log_y 4 = 0.\end{cases}$$

Задача 7. Задана функция f, причём $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всех рациональных чисел x, y. Известно, что $f(10) = -\pi$. Найдите $f(-2/7)$.

Ответы. 1. ± 1. **2.** $-\pi/12 + 2\pi k$, $-7/12\pi + 2\pi n$, k, $n \in \mathbb{Z}$. **3.** $16\sqrt{5}$. **4.** $x \in [1; 2)$. **5.** 4 раза. **6.** $x = -1/2$, $y = 2$. **7.** $\pi/35$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), биологический факультет, факультет биоинженерии и биоинформатики, факультет фундаментальной медицины, факультет наук о материалах, 2.

Задача 1. Решите уравнение $x^2 + |x| - 6 = 0$.

Задача 2. Решите уравнение $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{2}$.

Задача 3. Диагонали трапеции равны 13 см и 3 см, а сумма длин оснований равна 14 см. Найдите высоту трапеции.

Задача 4. Решите неравенство $\sqrt{2-x} < x + 4$.

Задача 5. На беговой дорожке стадиона длиной 400 м одновременно со старта в одном направлении начинают забег два спортсмена на дистанцию 10 км. Каждый из них бежит со своей постоянной скоростью. Второй спортсмен приходит на финиш на 20 мин 50 с позже первого и через 33 мин 20 с после того, как его в пятый раз на дистанции (не считая момента старта) обогнал первый спортсмен. Во время всего забега первый первый спортсмен обогнал второго на дистанции после старта не более 10 раз. Найдите скорость спортсменов.

Задача 6. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-2x+2y+2} = \sqrt{37} - \sqrt{x^2+y^2-4x-10y+29}, \\ \log_{x-1} 7 + \log_y 7 = 0. \end{cases}$$

Задача 7. Задана функция f, причём $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ для всех рациональных чисел x, y. Известно, что $f(4) = 16$. Найдите $f(-3/2)$.

Ответы. **1.** ± 2. **2.** $-\pi/12 + 2\pi k,\ 5/12\pi + 2\pi n,\ k,\ n \in \mathbb{Z}$. **3.** $6\sqrt{10}/7$. **4.** $x \in (-2; 2]$. **5.** 160 м/мин, 120 м/мин. **6.** $x = 3/2$, $y = 2$. **7.** $1/(2\sqrt{2})$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), факультет почвоведения, 1.

Задача 1. Решите уравнение $(6x-15)^7 = (x-1)^{14}$

Задача 2. Решите уравнение $\sin(\sqrt{3}\arcsin x) = 1$.

Задача 3. Решите неравенство $|x-1| \leqslant |x|$.

Задача 4. Грузовики трёх типов A, B и C возили кирпич. В первый день работали по пять грузовиков каждого типа и выполнили весь объём работы за 3 часа 12 минут. Во второй день за 6 часов 40 минут этот же объём работы выполнили по два грузовика типов A и B и четыре грузовика типа C. За сколько часов был бы выполнен весь объём работы, если бы кирпич возили два грузовика типа A и два грузовика типа B?

Задача 5. Для каких значений параметра p отношение суммы коэффициентов многочлена $(px^2-7)^{18}$ к его свободному члену минимально?

Задача 6. На плоскости даны 4 точки с координатами $A(1;2)$, $B(2;1)$, $C(3;-3)$, $D(0;0)$. Они являются вершинами выпуклого четырёхугольника $ABCD$. В каком отношении точка пересечения диагоналей S делит диагональ AC?

Ответы. **1.** 4. **2.** $\sin(\sqrt{3}\pi/6)$. **3.** $x \geqslant 1/2$. **4.** 10 часов. **5.** 7. **6.** $1:3$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), факультет почвоведения, 2.

Задача 1. Решите уравнение $(y+1)^{10} = (6y-3)^5$

Задача 2. Решите уравнение $\cos(\sqrt{2}\arcsin x) = 0$.

Задача 3. Решите неравенство $|y+2| \leqslant |y|$.

Задача 4. Насосы трёх типов $T1$, $T2$ и $T3$ откачивали воду из бака. Работали по 4 насоса каждого типа, и всю воду из бака выкачали за 5 часов. Если бы работали по три насоса типов $T1$ и $T2$ и пять типа $T3$, то они выкачали бы всю воду из бака за $5\frac{1}{7}$ часа. За сколько часов выкачивают всю воду из бака два насоса типа $T1$ и два насоса типа $T2$?

Задача 5. Для каких значений параметра q отношение суммы коэффициентов многочлена $(qx^3-9)^{14}$ к его свободному члену минимально?

Задача 6. На плоскости даны 4 точки с координатами $A(-1;2)$, $B(-2;1)$, $C(-3;-3)$, $D(0;0)$. Они являются вершинами выпуклого четырёхугольника $ABCD$. В каком отношении точка пересечения диагоналей K делит диагональ AC?

Ответы. **1.** 2. **2.** $\pm\sin(\sqrt{2}\pi/4)$. **3.** $y \geqslant -1$. **4.** 18 часов. **5.** 9. **6.** 3.

ВАРИАНТ 2005 (июль), геологический факультет, 1.

Задача 1. Решите неравенство $(|x|-1)(2x^2+x-1) \leqslant 0$.

Задача 2. Решите неравенство $\sqrt{-x^2-x+6} - x \geqslant 2$.

Задача 3. В треугольнике ABC угол C прямой, $\operatorname{tg}(\angle BAC) = 1/4$, медиана BD равна $\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника ABD и радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABD.

Задача 4. Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{\cos 2x + x - 11} = \sqrt{x - 15 - 5\cos x}.$$

Задача 5. В арифметической прогрессии квадрат суммы третьего и четвёртого её членов равен сумме второго и пятого её членов. Чему равна сумма первых шести членов этой прогрессии?

Задача 6. Решите неравенство $\log_x(x+1/3) \leqslant \log_{\sqrt{2x+3}}(x+1/3)$.

Задача 7. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x+a$ при условии

$$|2x+4-2a| + |x-2+a| \leqslant 3.$$

Задача 8. В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы ABC и SAB прямые, двугранный угол между плоскостями ABS и ABC равен $\operatorname{arctg}(2\sqrt{10}/3)$. Найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины B на плоскость ASC, если $BC = 7$, $AB = 4$.

Ответы. **1.** $\{-1\}\cup[1/2;1]$. **2.** $[-3;(\sqrt{41}-5)/4]$. **3.** $S_{\triangle ABC} = 1$, $R = \dfrac{\sqrt{85}}{2}$. **4.** 5π. **5.** $S_6 = 0,3$. **6.** $[2/3;1)\cup[3;+\infty)$. **7.** $[-1;5]$. **8.** $12/5$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), геологический факультет, 2.

Задача 1. Решите неравенство $(|x|-2)(2x^2+3x-2) \leqslant 0$.

Задача 2. Решите неравенство $\sqrt{-x^2+x+6} - x \geqslant 1$.

Задача 3. В треугольнике ABC угол C прямой, $\operatorname{tg}(\angle ABC) = 4$, медиана BD равна $\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника ABD и радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABD.

Задача 4. Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{8 - x - \cos 2x} = \sqrt{10 - x - \sin x}.$$

Задача 5. В арифметической прогрессии квадрат суммы четвёртого и пятого её членов равен сумме третьего и шестого её членов. Чему равна сумма первых восьми членов этой прогрессии?

Задача 6. Решите неравенство $\log_x(x+1/4) \leqslant \log_{\sqrt{3x+4}}(x+1/4)$.

Задача 7. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x - a$ при условии

$$|2x + 2a - 2| + |x + 1 - a| \leqslant 4.$$

Задача 8. В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы ABC и SAB прямые, двугранный угол между плоскостями ABS и ABC равен $\operatorname{arcctg}(\sqrt{65}/4)$. Найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины B на плоскость ASC, если $BC = 9$, $AB = 4$.

Ответы. **1.** $\{-2\}\cup[1/2;2]$. **2.** $[-2;(\sqrt{41}-1)/4]$. **3.** $S_{\triangle ABC} = 1$, $R = \dfrac{\sqrt{85}}{2}$. **4.** $5\pi/2$. **5.** $S_8 = 0,4$. **6.** $[3/4;1)\cup[4;+\infty)$. **7.** $[-5;3]$. **8.** $2\sqrt{2}$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), географический факультет, 1.

Задача 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 12\sin^2 x - \sin^2 y = 3, \\ 6\sin x + \cos y = -2. \end{cases}$$

Задача 2. Произведение длины средней линии трапеции и длины отрезка, соединяющего середины её диагоналей, равно 25. Найдите площадь трапеции, если её высота втрое больше разности оснований.

Задача 3. Решите неравенство $\log_{\sqrt{1-x}}(1+5x) \geqslant -2$.

Задача 4. Найдите периметр фигуры, точки которой на координатной плоскости $(x; y)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y > \big||x-2|-1\big|, \\ x^2 + y^2 < 4x + 2y - 3. \end{cases}$$

Задача 5. В цехе имелось N одинаковых станков, которые, работая вместе, вытачивали в день 5850 готовых деталей. После модернизации число производимых в день каждым станком готовых деталей возросло на 25%. Это позволило по крайней мере без сокращения общего объёма продукции цеха уменьшить число станков максимум на 4. Найдите N.

Задача 6. Угол между прямыми, каждая из которых содержит по одной образующей конуса, равен 45°. Прямая, перпендикулярная обеим этим образующим, пересекает плоскость основания конуса под углом $\pi/8$. Найдите угол боковой развёртки конуса, если известно, что он больше 270°.

Ответы. **1.** $(x; y) = (-\pi/2 \pm \pi/3 + 2\pi k; 2\pi m)$, $k, m \in \mathbb{Z}$. **2.** 150. **3.** $[4/5; 1)$. **4.** $(3\pi + 4)\sqrt{2}/2$. **5.** 26. **6.** $\sqrt{7/2}\,\pi$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), географический факультет, 2.

Задача 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 32\cos^2 x - \cos^2 y = 8, \\ 8\cos x + \sin y = 3. \end{cases}$$

Задача 2. Площадь трапеции, высота которой вчетверо меньше разности оснований, равна 17. Найдите произведение длины средней линии трапеции и длины отрезка, соединяющего середины её диагоналей.

Задача 3. Решите неравенство $\log_{\sqrt{1+x}}(1-7x) \geqslant -2$.

Задача 4. Найдите периметр фигуры, точки которой на координатной плоскости $(x; y)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y > \big||x+1|-2\big|, \\ x^2+y^2 < 4y-2x+3. \end{cases}$$

Задача 5. Птицеферма имела M куриц одинаковой породы, которые могли снести в сумме 8232 яйца в год. После выведения новой яйценосной породы число яиц, приносимых одной курицей в год, возросло на 25%. Это позволило по крайней мере без сокращения общего объёма продукции птицефермы уменьшить число куриц максимум на 4. Найдите M.

Задача 6. Две прямые, каждая из которых содержит по одной образующей конуса, пересекаются под углом $30°$. Угол между плоскостью основания конуса и плоскостью, проходящей через эти образующие, равен $5\pi/8$. Найдите угол боковой развёртки конуса, если известно, что он больше $180°$.

Ответы. 1. $(x; y) = (\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi m)$, $k, m \in \mathbb{Z}$. **2.** 34. **3.** $(-1; -6/7]$. **4.** $(3\pi+4)\sqrt{2}$. **5.** 21. **6.** $\sqrt{15}\,\pi/2$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), филологический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение $\big|x^2 - 3|x| + 1\big| = 1$.

Задача 2. На вступительном экзамене по математике 15% поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число верно решивших все задачи относится к числу не решивших вовсе как 5 : 3. Сколько человек экзаменовалось по математике в этот день?

Задача 3. Решите неравенство $\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16$.

Задача 4. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения

$$2x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Задача 5. Решите уравнение $2 + \sin t = 3\,\mathrm{tg}(t/2)$.

Задача 6. Биссектриса CD угла ACB при основании равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) делит сторону AB так, что $AD = BC$. Найдите длину биссектрисы CD и площадь треугольника ABC, если его основание BC равно 2.

Задача 7. При каких целых a неравенство

$$2\log_{1/2} a - 3 + 2x\log_{1/2} a - x^2 < 0$$

верно для любого значения x?

Ответы. **1.** 0, ±1, ±2, ±3. **2.** 240. **3.** $(-3/4; 0) \cup (3; +\infty)$. **4.** 2π. **5.** $\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **6.** $l = 2$, $S = \operatorname{tg}(2\pi/5) = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$. **7.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

ВАРИАНТ 2005 (июль), филологический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение $|x^2 - 5|x| + 2| = 2$.

Задача 2. На вступительном экзамене по математике 12% поступающих не решили ни одной задачи, 145 человека решили задачи с ошибками, а число верно решивших все задачи относится к числу не решивших вовсе как 5 : 2. Сколько человек экзаменовалось по математике в этот день?

Задача 3. Решите неравенство $\log_3(x + 2) > \log_{x+2} 81$.

Задача 4. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения

$$x^2 - 4x + 2 = 0.$$

Задача 5. Решите уравнение $2\,(\operatorname{tg}(t/2) - 1) = \cos t$.

Задача 6. Биссектриса MN угла KML при основании равнобедренного треугольника KML ($KM = KL$) делит сторону KL так, что $KN = NM$. Найдите длину биссектрисы MN и периметр треугольника KML, если его основание ML равно 4.

Задача 7. При каких целых b неравенство

$$\log_{1/3} b - 2 + 2x\log_{1/3} b - x^2 < 0$$

верно для любого значения x?

Ответы. **1.** 0, ±1, ±4, ±5. **2.** 250. **3.** $(-2; -17/9) \cup (-1; 7)$. **4.** 3π. **5.** $\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **6.** $l = 4$, $P = 4 + 4/\cos(2\pi/5) = 8 + 4\sqrt{5}$. **7.** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), экономический факультет (отделение экономики), 1.

Задача 1. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_{1/9} \operatorname{ctg}(2x/9)} + \sqrt{\log_{1/9} \sin(4x)} = 0.$$

Задача 2. Найдите сумму всех целых значений, которые принимает функция $y = x/\sqrt{5} - x^2/20 + 6$ при $x \in [2; 12]$.

Задача 3. Вновь созданное акционерное общество продало населению 1000 своих акций, установив скидку 10% на каждую пятую продаваемую акцию и 25% на каждую тринадцатую продаваемую акцию. В случае, если на одну акцию выпадают обе скидки, применяется большая из них. Определите сумму, вырученную от продажи всех акций, если цена акции составляет 1000 рублей.

Задача 4. Решите неравенство

$$\log_{2+\sqrt{5}}(4 - x) - \log_{9-4\sqrt{5}}(4x^2 + 28x + 49) + \log_{\sqrt{5}-2}(x^2 + x - 6) \leqslant 0.$$

Задача 5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон в точках K, M и N. Известно, что в треугольнике KNM угол $\angle M$ равен 75°, произведение всех сторон равно $9+6\sqrt{3}$, а вершина K делит отрезок AC пополам. Найдите длины сторон треугольника ABC.

Задача 6. Найдите все рациональные решения уравнения

$$\sqrt{y(x+1)^2 - x^2 + x + 1} + \log^2_{|y+2|/21} \cos^2 \pi y = 0.$$

Задача 7. Фигура F задаётся на координатной плоскости неравенством

$$\frac{3\pi^2 - 2\arcsin\left(\frac{y-x+9}{13}\right) \cdot \arccos\left(\frac{10+2x+2y}{18}\right)}{|x-4| \cdot \left(|\sqrt{9\sqrt{128} - 97} + x| + |y+5|\right)} \geqslant 0.$$

В каких пределах изменяются площади всевозможных кругов, целиком принадлежащих F?

Ответы. 1. $\frac{9\pi(4k+1)}{8}$, $k \in \mathbb{Z}$. **2.** 18. **3.** 962500 рублей. **4.** $[1-\sqrt{23}; -\frac{7}{2}) \cup$ $\cup (-7/2; -\sqrt{34/3}] \cup [\sqrt{34/3}; 4)$. **5.** $2\sqrt{3}+4$, $2\sqrt{3}+4$, $4\sqrt{3}+6$. **6.** $(x; y) = (-\frac{2}{3}; 1)$, $(-1 - 1/(l-1); l^2 + l - 1)$, $(-1 + 1/(l+2); l^2 + l - 1)$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \neq -5, -2, 1, 4$. **7.** $(0; 16\pi)$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), экономический факультет (отделение экономики), 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_{1/8}\cos 3x} + \sqrt{\log_{1/3}\operatorname{tg}(3x/8)} = 0.$$

Задача 2. Найдите сумму всех целых значений, которые принимает функция $y = x^2/12 - x/\sqrt{3} + 4$ при $x \in [2;9]$.

Задача 3. В целях рекламы модели роликовых коньков спортивный магазин установил скидку 20% на каждую третью продаваемую пару коньков и 30% на каждую пятую продаваемую пару коньков новой модели. В случае, если на одну пару коньков выпадают обе скидки, применяется большая из них. За месяц было продано 250 пар роликовых коньков новой модели. Выясните месячную выручку магазина от продажи новой модели роликовых коньков, если их базовая цена составляет 10000 рублей.

Задача 4. Решите неравенство

$$\log_{3+\sqrt{8}}(3-x) - \log_{17-6\sqrt{8}}(4x^2+20x+25) + \log_{3-\sqrt{8}}(x^2+x-2) \geqslant 0.$$

Задача 5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон в точках K, M и N. Известно, что в треугольнике KNM углы $\angle M$ и $\angle N$ равны соответственно 60° и 75°, а произведение всех сторон равно $9(1+\sqrt{3})$. Найдите длины сторон треугольника ABC.

Задача 6. Найдите все рациональные решения уравнения

$$\sqrt{x(y+1)^2+y^2-3} + \log^2_{|x|/59}(1+\operatorname{tg}^2 \pi x) = 0.$$

Задача 7. Фигура F задаётся на координатной плоскости неравенством

$$\frac{\arcsin\left(\frac{9+2x-2y}{13}\right) - \arccos\left(\frac{2x+2y+5}{9}\right) - 2\pi}{\left(|2y+\sqrt{18\sqrt{32}-97}| + |2x+5|\right)\cdot|2-y|} \geqslant 0.$$

В каких пределах изменяются площади всевозможных кругов, целиком принадлежащих F?

Ответы. 1. $2\pi(4k+1)/3$, $k \in \mathbb{Z}$. **2.** 60. **3.** 2 216 000 руб. **4.** $(-\infty; 1-\sqrt{14}] \cup \cup [-\sqrt{17/3}; -2) \cup (1; \sqrt{17/3}]$. **5.** $2\sqrt{3}+6$, $3\sqrt{3}+3$, $\sqrt{3}+3$. **6.** $(x;y) = (-1;-2)$, $(2l^2+2l-1; -1-1/(l+1))$, $(2l^2+2l-1; -1-1/l)$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \neq -6, -1, 0, 5$. **7.** $(0; 4\pi)$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), экономический факультет (отделение менеджмента), 1.

Задача 1. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_2(x^2-x-5)}+\sqrt{\log_{1/3}\cos\pi x}=0.$$

Задача 2. Найдите произведение всех целых значений, которые принимает функция $y=x^2/12-x/\sqrt{3}+4$ при $x\in[2;9]$.

Задача 3. В целях рекламы модели автомобиля автосалон установил скидку 10% на каждый седьмой продаваемый автомобиль и 20% на каждый одиннадцатый продаваемый автомобиль новой модели. В случае, если на один автомобиль выпадают обе скидки, применяется большая из них. Всего было продано 516 автомобилей этой модели. Определите выручку автосалона от продажи автомобилей новой модели, если их базовая цена составляет 20000 условных единиц.

Задача 4. Решите неравенство

$$\log_{1+\sqrt{2}}(x+4)+2\log_{3+2\sqrt{2}}(7-2x)+\log_{\sqrt{2}-1}(x^2-x-6)\leqslant 0.$$

Задача 5. Вписанная в треугольник ABC окружность радиуса 1 касается сторон AB, BC, AC соответственно в точках K, M и N. Известно, что углы $\angle MKN$ и $\angle ABC$ оба равны 45°. Найдите длины сторон треугольника ABC.

Задача 6. Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения $\sqrt[3]{x^6}-(1/a-2)\cdot\sqrt[4]{x^4}+1-2/a=0$ являются целыми числами.

Ответы. 1. -2. **2.** 60. **3.** 10 миллионов 2 тысячи у. е. **4.** $(-4;-\sqrt{34/3}]\cup\cup[\sqrt{34/3};7/2)$. **5.** $2+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $2+2\sqrt{2}$. **6.** $a=2$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), экономический факультет (отделение менеджмента), 2.

Задача 1. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_2(x^2-x-5)}+\sqrt{\log_{1/3}\cos\pi x}=0.$$

Задача 2. Найдите сумму всех целых значений, которые принимает функция $y=x/\sqrt{5}-x^2/20+6$ при $x\in[2;12]$.

Задача 3. В целях ускорения распродажи дублёнок магазин установил скидку 15% на каждую четвёртую продаваемую дублёнку и 25% на каждую шестую продаваемую дублёнку. В случае, если на одну дублёнку выпадают обе скидки, применяется большая из них. Всего было продано 602 дублёнки. Определите выручку магазина от продажи дублёнок, если базовая цена дублёнки составляет 5000 рублей.

Задача 4. Решите неравенство

$$\log_{2+\sqrt{3}}(x+3) + 2\log_{7+4\sqrt{3}}(5-2x) + \log_{2-\sqrt{3}}(x^2-x-2) \geqslant 0.$$

Задача 5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB, BC, AC соответственно в точках K, M и N. Известно, что $AC = 1$, а углы $\angle MKN$ и $\angle ABC$ равны соответственно 45° и 30°. Найдите радиус окружности.

Задача 6. Найдите все целые значения параметра b, при каждом из которых все решения уравнения

$$(1+1/b)\cdot\sqrt[5]{x^{10}} + (2+1/b)\cdot\sqrt[6]{x^6} + 1 - 1/b = 0$$

являются целыми числами.

Ответы. 1. -3. **2.** 18. **3.** 2 810 000 руб. **4.** $[-\sqrt{17/3}; -1) \cup (2; \sqrt{17/3}]$. **5.** $1/(1+\sqrt{3})$. **6.** $b = 1$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), факультет психологии, 1.

Задача 1. Решите уравнение $|x-2| + 2|x+1| = 9$.

Задача 2. Решите неравенство $\frac{4^x+5}{2^x-11} \geqslant -1$.

Задача 3. Решите уравнение $\sqrt{2\cos^2 x - \sqrt{3}} + \sqrt{2}\sin x = 0$.

Задача 4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали BD и AC равны стороне AB. Найдите величину угла BCD и сторону AB, если угол CDA прямой, $BC = 4$, $AD = 5$.

Задача 5. Зенон не раз наблюдал забавную игру Ахилла с черепахой: Ахилл и черепаха приближались друг к другу вдоль тропинки, стартуя с разных концов тропинки. Двигались они только навстречу друг другу, причём, когда черепаха стояла, Ахилл шёл навстречу ей, а когда черепаха ползла навстречу Ахиллу, Ахилл стоял в течение всего времени её движения. Продвигались они по тропинке друг к другу каждый со своей постоянной скоростью, одной и той же в разных играх, причём скорость идущего Ахилла была в 50 раз больше скорости ползущей черепахи. Игра заканчивалась, когда Ахилл и черепаха сходились в одной точке тропинки.

В первой игре, начав сближаться по первой тропинке, они сошлись не ранее чем через 15 минут. Во второй игре, сближаясь по второй тропинке, они сошлись не позже чем через полторы минуты. В третьей игре они сошлись по третьей тропинке за 11 минут, причём в ходе этой игры Ахилл двигался в общей сложности в течение 1 минуты, а черепаха — в течение 10 минут. Известно, что сумма длин первой и третьей тропинок равна длине второй тропинке.

Каково отношение расстояния, пройденного Ахиллом навстречу черепахе за время всех трёх игр, к расстоянию, на которое продвинулась черепаха навстречу Ахиллу за время всех трёх игр?

Задача 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x)=\frac{4\sin x+a}{4a-2\sin x}$ принимает все значения из отрезка $[0;1]$.

Ответы. **1.** ± 3. **2.** $x\in(-\infty;1]\cup(\log_2 11;+\infty)$. **3.** $-\pi/12+2\pi m$, $-11\pi/12+2\pi n$, $m,n\in\mathbb{Z}$. **4.** $\pi-\arcsin(5/8)$, $4\sqrt{22/13}$. **5.** 5. **6.** $|a|\leqslant 2$, $a\neq 0$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), факультет психологии, 2.

Задача 1. Решите уравнение $|x+1|+2|x-2|=9$.

Задача 2. Решите неравенство $\frac{25^x-28}{5^x-6}\geqslant 3$.

Задача 3. Решите уравнение $\sqrt{2\cos^2 x-\sqrt{2}}+\sqrt{2}\sin x=0$.

Задача 4. В выпуклом четырёхугольнике $KLMN$ диагонали LN и KM равны стороне KL. Найдите величину угла LMN и сторону KL, если угол MNK прямой, $LM=3$, $KN=4$.

Задача 5. По вечерам Солоха зазывала Пацюка к себе на ужин и угощала варениками. Вареники у Солохи были вкусные и всегда на удивление одинаковы: в какой день ни возьми — все точь-в-точь как один. Ужинали они только вдвоём, да так уважительно, что уж если кто-то из них кушал вареники, то другой в это время не кушал, а нахваливал, и наоборот, если кто-то не кушал вареников, то другой в это самое время их кушал. Каждый из них кушал размеренно, поглощая вареники со своей постоянной скоростью, одной и той же в разные вечера, причём Пацюк поглощал вареники втрое быстрее Солохи.

В первый вечер они съели полную миску вареников за 3 часа, причём 2 часа кушал вареники Пацюк, а 1 час кушала Солоха. Во второй вечер, к радости хозяйки, не дольше чем за 3 часа, была поглощена вся другая миска вареников, а в третий вечер — целая третья миска, причём не быстрее чем за 1 час. Больше Пацюк в гости к Солохи почему-то не ходил.

А миски у Солохи были таковы, что коли сложить бы все вареники, приготовленные и съеденные в первый вечер, с двумя такими мисками, какая в третий вечер была съедена, то получилась бы как раз миска вареников, выкушанных во второй вечер. Какую долю приготовленных к этим трём ужинам вареников съел Пацюк?

Задача 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x) = \frac{4\cos x + 6a}{4a - \cos x}$ принимает все значения из отрезка $[1; 2]$.

Ответы. **1.** 4, -2. **2.** $x \in (-\infty; 1] \cup (\log_5 6; +\infty)$. **3.** $-\pi/8 + 2\pi m$, $-7\pi/8 + 2\pi n$, $m, n \in \mathbb{Z}$. **4.** $\pi - \arcsin(2/3)$, $3\sqrt{41/20}$. **5.** $15/17$. **6.** $|a| \leqslant 5/2$, $a \neq 0$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), ИСАА, 1.

Задача 1. Решите неравенство $\frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} \leqslant 1$.

Задача 2. Решите уравнение $\cos 4x = 4\cos x \cos 2x - 1$.

Задача 3. Решите уравнение $\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 + 4x + 3} = \sqrt{(x+2)^3}$.

Задача 4. Магазин закупил некоторое количество товара и начал его реализацию по цене на 25% выше цены, назначенной производителем, чтобы покрыть затраты, связанные с его транспортировкой, и другие дополнительные расходы. Оставшуюся после реализации часть товара магазин уценил на 16%, с тем чтобы покрыть только затраты на закупку этой части товара у производителя и его транспортировку. Сколько процентов от цены, назначенной производителем, составляла стоимость транспортировки товара?

Задача 5. Решите неравенство

$$\log_{4|x|+1}(6x + 2) - \log_{6x+2}(4|x| + 1) < 0.$$

Задача 6. В выпуклом четырёхугольнике с вершинами в точках A, B, C, D заданы длины отрезков $AD = 2$, $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 2(\sqrt{3} - 1)$. Величины углов DAB и ABC равны $\pi/6$ и $\pi/3$ соответственно. Вычислите все углы четырёхугольника.

Задача 7. Фигура на плоскости $(x; y)$ состоит из всех точек, через которые не проходит ни одна из кривых, задаваемых соотношением

$$(p^4 + 4p^2 + 16)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 16(p^3 + 4p)xy + 2(p^4 + 12p^2 + 16)(x^2 + y^2)$$

при различных действительных значениях p. Найдите длину линии, ограничивающей эту фигуру.

Ответы. **1.** $(-\infty;-1)\cup(-1;5]$. **2.** $\pi/4+\pi m/2$, $\pm\arccos((1-\sqrt{3})/2)+2\pi n$, $n,m\in\mathbb{Z}$. **3.** $(-3+\sqrt{5})/2$. **4.** 5%. **5.** $(-1/3;-1/4)\cup(-1/6;-1/10)$. **6.** $\pi/6$, $\pi/3, 7\pi/12, 11\pi/12$ или $\pi/2, 2\pi/3, \alpha, 5\pi/6-\alpha$, где $\alpha=\arccos(\sqrt{3}/(2\sqrt{4-\sqrt{3}}))$. **7.** $12\sqrt{2}$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), ИСАА, 2.

Задача 1. Решите неравенство $\frac{x^2+2x-8}{x+4}\leqslant 1$.

Задача 2. Решите уравнение $\sin 4x=4\sin x\sin 2x$.

Задача 3. Решите уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{x^2+2x}=\sqrt{(x+1)^3}$.

Задача 4. Магазин закупил некоторое количество товара и начал его реализацию по цене на 20% выше цены, назначенной производителем, чтобы покрыть затраты, связанные с его транспортировкой, и другие дополнительные расходы. Оставшуюся после реализации часть товара магазин уценил на 15%, с тем чтобы покрыть только затраты на закупку этой части товара у производителя и его транспортировку. Сколько процентов от цены, назначенной производителем, составляла стоимость транспортировки товара?

Задача 5. Решите неравенство

$$\log_{2|x|+1}(3x+2)-\log_{3x+2}(2|x|+1)>0.$$

Задача 6. В выпуклом четырёхугольнике с вершинами в точках A, B, C, D заданы длины отрезков $AD=2\sqrt{2}$, $AB=2(\sqrt{3}+1)$, $BC=2\sqrt{3}$. Величины углов DAB и ABC равны $\pi/4$ и $\pi/3$ соответственно. Вычислите все углы четырёхугольника.

Задача 7. Фигура на плоскости $(x;y)$ состоит из всех точек, через которые не проходит ни одна из кривых, задаваемых соотношением

$$(p^4+2p^2+9)^2+(x^2-y^2)^2=16(p^3+3p)xy+2(p^4+10p^2+9)(x^2+y^2)$$

при различных действительных значениях p. Найдите длину линии, ограничивающей эту фигуру.

Ответы. **1.** $(-\infty;-4)\cup(-4;3]$. **2.** $\pi m/2$, $(-1)^n\arcsin((-1+\sqrt{3})/2)+\pi n$, $n,m\in\mathbb{Z}$. **3.** $(-1+\sqrt{5})/2$. **4.** 2%. **5.** $(-1/2;-1/3)\cup(-1/5;0)\cup(0;+\infty)$. **6.** $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, $11\pi/12$ или $\pi/2$, $7\pi/12$, α, $11\pi/12-\alpha$, где $\alpha=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{8+2\sqrt{3}}}\right)$. **7.** $8\sqrt{2}$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), социологический факультет, 1.

Задача 1. Решите уравнение $\sqrt{x^2-4x+9}=3$.

Задача 2. Решите уравнение $3\cdot 81^x-10\cdot 9^x+3=0$.

Задача 3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия содержит член $b_n=1/6$. Отношение суммы членов прогрессии, стоящих перед b_n, к сумме членов, стоящих после b_n, равно 6. Найдите n, если сумма всей прогрессии равна 3/4.

Задача 4. Высота треугольника длиной 2 делит угол треугольника в отношении 2 : 1, и делит основание треугольника на части, меньшая из которых равна 1. Определите площадь треугольника.

Задача 5. Решите неравенство $\log_{1/2}(\sqrt{5-x}-x+1)>-3$.

Задача 6. Группа из нескольких школьников решила купить музыкальный центр, при этом каждый внес одинаковую сумму. Однако в последний момент двое из них отказались, и каждому из оставшихся пришлось добавить 100 рублей. Сколько школьников первоначально участвовало в покупке и какова цена музыкального центра, если известно, что она заключена в пределах от 17000 до 19500 рублей?

Ответы. **1.** 0, 4. **2.** $\pm 1/2$. **3.** $n=2$. **4.** 11/3. **5.** $(-4;(1+\sqrt{17})/2)$. **6.** 20, 18000 руб.

ВАРИАНТ 2005 (июль), социологический факультет, 2.

Задача 1. Решите уравнение $\sqrt{16+x^2-16x}=4$.

Задача 2. Решите уравнение $2\cdot 4^{3x}-5\cdot 8^x+2=0$.

Задача 3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия содержит член $b_n=1/8$. Отношение суммы членов прогрессии, стоящих перед b_n, к сумме членов, стоящих после b_n, равно 14. Найдите n, если сумма всей прогрессии равна 2.

Задача 4. Высота треугольника длиной 1 делит угол треугольника в отношении 2 : 1, и делит основание треугольника на части, большая из которых равна 4/3. Определите площадь треугольника.

Задача 5. Решите неравенство $\log_{1/2}(\sqrt{5-x}-x+5)>0$.

Задача 6. Студенты, проживающие в одной комнате, решили купить электрический чайник, при этом каждый внес одинаковую сумму. Однако в последний момент один студент отказался, и каждому из оставшихся пришлось добавить 100 рублей. Сколько студентов проживало в комнате и какова цена чайника, если известно, что она заключена в пределах от 1000 до 1500 рублей?

Ответы. **1.** 0, 16. **2.** $\pm 1/3$. **3.** $n = 4$. **4.** 11/12. **5.** $((7+\sqrt{5})/2; 5)$. **6.** 4, 1200 руб.

ВАРИАНТ 2005 (июль), факультет государственного управления, 1.

Задача 1. Можно ли разделить сумму в 196 рублей на 16 различных частей так, чтобы ближайшие по величине части отличались на 50 копеек.

Задача 2. Решите неравенство $1 < \frac{\sqrt{2}(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+17}}$.

Задача 3. В четырёхугольнике $ABCD$ найдите такую точку E, чтобы отношение площадей треугольников EAB и ECD было равно $1:2$, а треугольников EAD и EBC — $3:4$, если известны координаты всех его вершин: $A(-2;-4)$, $B(-2;3)$, $C(4;6)$, $D(4;-1)$.

Задача 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \sin 1 = 0, \\ \cos x - \cos 1 = 0. \end{cases}$$

Задача 5. Тёма сделал несколько мелких покупок в супермаркете, имея при себе сто рублей. Давая сдачу с этой суммы, кассир ошиблась, перепутав местами цифры и выплатила рублями то, что должна была вернуть копейками, и наоборот, копейками то, что полагалось вернуть рублями. Купив в аптеке набор пипеток за 1 руб. 40 коп., Тёма обнаружил ошибку кассира и, пересчитав деньги, нашёл, что оставшаяся у него сумма втрое превышает ту, которую ему должны были вернуть в супермаркете. Какова стоимость всех покупок Тёмы?

Задача 6. Найдите все значения a, для которых при любом положительном b уравнение $a \log_{1/x-2} 4 = \log_2(1/x - 2) - b$ имеет хотя бы одно решение, меньшее $1/3$.

Задача 7. Для того чтобы сделать полный круг по кольцевому маршруту, автомобилю требуется 150 л бензина. На маршруте расположены пять промежуточных пунктов, в каждом из которых имеется запас в 30 л бензина. Покажите, что найдётся пункт, в котором автомашина с пустыми баками и достаточным запасом пустых канистр может заправиться, стартовать и, пополняя запас бензина в четырёх встречных пунктах, сделать полный круг.

Ответы. **1.** Можно. С 8 руб. 50 коп. по 16 руб 00 коп. включительно. **2.** $(5; +\infty)$. **3.** $E(0; 0)$. **4.** $1 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **5.** 69 руб. 43 коп. **6.** $a \geqslant 0$. **7.** Найдётся.

ВАРИАНТ 2005 (июль), факультет государственного управления, 2.

Задача 1. Удастся ли ювелиру изготовить из 198 граммов металла 24 разных по массе кольца так, чтобы ближайшие по массе отличались на полграмма? (Предполагается, что весь металл должен быть использован).

Задача 2. Решите неравенство $1 < \frac{\sqrt{5}(x-5)}{\sqrt{x^2-10x+26}}$.

Задача 3. В четырёхугольнике $PQRS$ найдите такую точку T, чтобы отношение площадей треугольников RQT и PST было равно $2:1$, а треугольников SRT и PQT — $1:5$, если известны координаты всех его вершин: $P(6; -2)$, $Q(3; 4)$, $R(-3; 4)$, $S(0; -2)$.

Задача 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin 1 = 0, \\ \cos x + \cos 1 = 0. \end{cases}$$

Задача 5. Мама дала Марусе 100 рублей на оплату поздравительной телеграммы бабушке. Возвращая сдачу, служащая телеграфа перепутала местами цифры и выплатила рублями то, что должна была вернуть копейками, и, наоборот, копейками то, что полагалось вернуть рублями. Выйдя с телеграфа и купив по дороге домой маленькую булочку за 3 рубля 50 копеек, Маруся обнаружила, что оставшаяся у нее сумма вдвое превышает ту, которую ему должны были вернуть на телеграфе. Какая сумма оказалась у Маруси в кошельке?

Задача 6. Найдите все значения a, для которых при любом отрицательном b уравнение

$$a \log_{1-2/x} 4 = \log_4(1 - 2/x) + b$$

имеет хотя бы одно решение, большее 4.

Задача 7. Для того чтобы сделать полный круг по кольцевому маршруту, автомобилю требуется 200 л бензина. На маршруте расположены пять промежуточных пунктов, в каждом из которых имеется запас в 40 л бензина. Покажите, что найдётся пункт, в котором автомашина с пустыми баками и достаточным запасом пустых канистр может заправиться, стартовать и, пополняя запас бензина в четырёх встречных пунктах, сделать полный круг.

Ответы. **1.** Да. С $2,5$ г до 14 г включительно. **2.** $(11/2; +\infty)$. **3.** $T(0;0)$. **4.** $1+\pi+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **5.** 28 руб. 64 коп. **6.** $a \geqslant 0$. **7.** Найдётся.

ВАРИАНТ 2005 (июль), московская школа экономики, 1.

Задача 1. Решите уравнение $|2x-4|+4=2x$.

Задача 2. Решите неравенство $\sqrt{x^2+2x}-x>1$.

Задача 3. Решите уравнение $1+\log_4(x+2)^2=\log_2(2x+8)$.

Задача 4. Найдите все решения уравнения

$$6\cos(15\pi/4)\cos(x/2)-\cos x=3,$$

принадлежащие отрезку $[-2; 10,99]$.

Задача 5. Найдите четыре числа, которые образуют арифметическую прогрессию, если сумма крайних равна 18 и второе число меньше третьего на 20%.

Задача 6. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-4)^2<5, \\ 4y \leqslant x+11. \end{cases}$$

Задача 7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC=21$, $BM=9$, а угол $\angle ABC$ равен 60°.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)\cdot 4^x+(2a-3)\cdot 6^x=(3a-4)\cdot 9^x$$

имеет единственное решение?

Ответы. **1.** $[1;+\infty)$. **2.** $(-\infty;2]$. **3.** -3. **4.** $-\pi/2$, $\pi/2$. **5.** 6, 8, 10, 12. **6.** $(2;3)$, $(3;2)$, $(3;3)$, $(4;3)$, $(5;4)$. **7.** $S=90\sqrt{3}$. **8.** $a \in (-\infty;1] \cup \{5/4\} \cup$ $\cup [4/3;+\infty)$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), московская школа экономики, 2.

Задача 1. Решите уравнение $|2x+3|-2x=3$.

Задача 2. Решите неравенство $\sqrt{x^2-2x}+1>x$.

Задача 3. Решите уравнение $1+\log_9(x+1)^2=\log_3(3x+9)$.

Задача 4. Найдите все решения уравнения

$$6\sin(23\pi/4)\sin(x/2)+\cos x=3,$$

принадлежащие отрезку $[-5;7,85]$.

Задача 5. Найдите четыре числа, которые образуют арифметическую прогрессию, если сумма крайних равна 23 и третье число больше второго на 30%.

Задача 6. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2<5,\\ 4y\leqslant x+8.\end{cases}$$

Задача 7. Окружность, вписанная в треугольник KLM, касается стороны KL в точке A. Найдите площадь треугольника KLM, если $KM=14$, $AL=6$, а угол $\angle KLM$ равен 60°.

Задача 8. При каких значениях параметра b уравнение

$$(b-1)\cdot 4^x+(2b-5)\cdot 10^x=(3b-7)\cdot 25^x$$

имеет единственное решение?

Ответы. **1.** $[-3/2;+\infty)$. **2.** $(-\infty;0]$. **3.** -2. **4.** $-3\pi/2$, $-\pi/2$. **5.** 7, 10, 13, 16. **6.** $(1;2)$, $(2;1)$, $(2;2)$, $(3;2)$, $(4;3)$. **7.** $S=40\sqrt{3}$. **8.** $b\in(-\infty;2]\cup$ $\cup\{9/4\}\cup[7/3;+\infty)$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), факультет глобальных процессов, 1.

Задача 1. В турнире борцов участвуют 127 спортсменов. Борец выбывает из соревнований сразу после поражения в поединке. Сколько поединков требуется провести, чтобы выявить победителя турнира?

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{1}{2x^2+3x}\leqslant\frac{1}{3x-2x^3}.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$\log_{0,5-|2x^2-5x+2|}(0,5+|8x^2-2x-1|) \geqslant 1.$$

Задача 4. Найдите площадь трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), вписанной в окружность с центром в точке O, если её высота равна 2, а угол COD равен $60°$.

Задача 5. Выясните, верно ли следующее утверждение: множество значений функции $y = \cos 2x - 3\sin x$ принадлежит отрезку $[-4; \sqrt{5}]$. Ответ надо обосновать.

Задача 6. Общий процент прибыли за весь товар, проданный в трёх магазинах, расположенных в разных районах города, составил $26,8\%$. Через первый магазин было продано 60% всего товара, через второй — 40% оставшейся части товара. С какой прибылью продан товар через третий магазин, если прибыль от продажи в первом составила 30%, а во втором — 25%?

Задача 7. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ ($AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ — боковые рёбра) верхняя грань $ABCD$ является одновременно основанием правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, у которой высота вдвое меньше длины ребра куба. Найдите угол между прямыми $A'B$ и AS.

Задача 8. Переменные x, y связаны условием

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0.$$

Найдите все значения параметра a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значением выражения $2ax - 3y - 10$ больше 12.

Ответы. **1.** 126. **2.** $(-3.2; -\sqrt{3.2}) \cup [-1; 0) \cup (0; \sqrt{3/2})$. **3.** $1/2$. **4.** $4\sqrt{3}$. **5.** Утверждение верно. **6.** 20%. **7.** $\pi/2$, $\arccos(5/6)$. **8.** $a \in (-\infty; -\sqrt{3}/2) \cup$ $\cup (\sqrt{3}/2; +\infty)$.

ВАРИАНТ 2005 (июль), факультет глобальных процессов, 2.

Задача 1. В соревнованиях по перетягиванию каната участвуют 63 команды. Команда выбывает из соревнований сразу после поражения. Сколько встреч требуется провести, чтобы выявить победителя?

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{1}{2x^2 - x} \leqslant \frac{1}{2x^3 - x}.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$\log_{1/3-|4x^2-7x-2|}(1/3+|12x^2+7x+1|) \geqslant 1.$$

Задача 4. Вокруг трапеции $PQRS$ ($PS \parallel QR$), площадь которой равна $3\sqrt{3}$, описана окружность с центром в точке O. Найдите величину угла SOR, если известно, что высота в трапеции равна 3.

Задача 5. Выясните, верно ли следующее утверждение: множество значений функции $y = 2\cos 4x - \cos 2x$ принадлежит отрезку $[-3/\sqrt{2}; 3]$. Ответ надо обосновать.

Задача 6. Общий процент прибыли за весь товар, проданный в трёх магазинах, расположенных в разных районах города, составил $25,4\%$. Через первый магазин было продано 40% всего товара, через второй — 60% оставшейся части товара. С какой прибылью продан товар через третий магазин, если прибыль от продажи в первом составила 35%, а во втором — 25%?

Задача 7. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ ($AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ — боковые рёбра) верхняя грань $ABCD$ является одновременно основанием правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, у которой высота вдвое больше длины ребра куба. Найдите угол между прямыми $A'D$ и AS.

Задача 8. Переменные x, y связаны условием

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 15 = 0.$$

Найдите все значения параметра a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значением выражения $3x + 2ay + 7$ не превосходит 20.

Ответы. **1.** 62. **2.** $(-1/\sqrt{2}; 0) \cup (0; 1/2) \cup (1/\sqrt{2}; 1]$. **3.** $-1/4$. **4.** 120°. **5.** Утверждение верно. **6.** 10%. **7.** $\pi/3$, $\arccos(5/6)$. **8.** $a \in [-\sqrt{11}/2; \sqrt{11}/2]$.

§2.4. Варианты 2006 года

ВАРИАНТ 2006 (апрель), «Покори Воробьёвы горы–2006»[1], 1.

Задача 1. Решите неравенство $\sqrt{x+3} > x - 2$.

[1]Этот вариант писали на факультетах: химическом, биологическом, географическом, почвоведения, факультете наук о материалах и психологическом.

Задача 2. Решите неравенство $|x+3| - |x^2+x-2| \geqslant 1$.

Задача 3. Решите уравнение $\log_{\cos x} \dfrac{4(1-\sin x)}{3} = 2$.

Задача 4. Первый член арифметической прогрессии равен -12, разность равна $24/11$. Найдите сумму первых n членов этой прогрессии при условии, что она меньше -39.

Задача 5. В выпуклом четырёхугольнике расстояния между серединами каких-то сторон равны 1, 2 и $\sqrt{5}$. Найдите площадь этого четырёхугольника.

Задача 6. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$2^{\frac{ax+3}{x^2+3}} + 2^{\frac{4x^2-ax+9}{x^2+3}} = 10.$$

Ответы. 1. $[-3; (5+\sqrt{21})/2)$. **2.** $x \in \{-2\} \cup [0;2]$. **3.** $\arcsin(1/3) + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. **4.** $S_n = S_6 = -432/11$. **5.** $S_1 = S_2 = S_3 = 4$, $S_4 = \sqrt{55}/2$ **6.** $x = 0$ а при любом a, $x = (a \pm \sqrt{a^2-72})/6$ при $|a| \geqslant 6\sqrt{2}$.

ВАРИАНТ 2006 (апрель), «Покори Воробьёвы горы–2006», 2.

Задача 1. Решите неравенство $\sqrt{x+2} > x-3$.

Задача 2. Решите неравенство $|x^2-x-2| - |x+2| \leqslant -1$.

Задача 3. Решите уравнение $\log_{\sin x} \dfrac{5(1-\cos x)}{4} = 2$.

Задача 4. Первый член арифметической прогрессии равен 14, разность равна $-28/11$. Найдите сумму первых n членов этой прогрессии при условии, что она больше 45.

Задача 5. В выпуклом четырёхугольнике расстояния между серединами каких-то сторон равны 1, 2 и $\sqrt{3}$. Найдите площадь этого четырёхугольника.

Задача 6. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$3^{\frac{ax+2}{x^2+2}} + 3^{\frac{3x^2-ax+4}{x^2+2}} = 12.$$

Ответы. 1. $[-2; (7+\sqrt{21})/21)$. **2.** $x \in \{-1\} \cup [1;3]$. **3.** $\arccos(1/4) + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. **4.** $S_n = S_6 = 504/11$. **5.** $S_1 = S_2 = S_3 = 2\sqrt{3}$, $S_4 = \sqrt{39}/2$ **6.** $x = 0$, а при любом a, $x = (a \pm \sqrt{a^2-16})/4$ при $|a| \geqslant 4$.

ВАРИАНТ 2006 (май), «Ломоносов–2006»[1], 1.

Задача 1. Вычислите

$$\log_4 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{16}}}}_{40}.$$

Задача 2. Что больше: $\operatorname{tg}(11\pi/6)$ или меньший корень уравнения $11x^2 - 17x - 13 = 0$?

Задача 3. Решите уравнение

$$\cos(x^2 + x) + \cos(x + 2\pi/3) + \cos(x + 4\pi/3) = 0.$$

Задача 4. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E. Известно, что $BD = 9$, $BE = 12$. Найдите радиусы окружностей.

Задача 5. Из пункта A в пункт B в 8^{00} выехал велосипедист, а через некоторое время из B в A вышел пешеход. Велосипедист прибыл в B через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришёл в A в 17^{00} того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из A в B проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

Задача 6. Решите неравенство $\sqrt{4-x} - 2 \leqslant x|x-3| + 4x$.

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos 2x - 2a\sin x - |2a - 1| + 2 = 0$$

имеет решения и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

Задача 8. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, $\angle SCB = 90^\circ$, $BC = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{7}$. Последовательность точек O_n строится следующим образом: точка O_1 — центр сферы, описанной около пирамиды $SABC$, и для каждого натурального $n \geqslant 2$ точка O_n — это центр сферы, описанной около пирамиды

[1] Этот экзамен состоялся на факультетах: механико-математическом, ВМиК, химическом, физическом, биологическом, геологическом и факультете почвоведения.

$O_{n-1}ABC$. Какую длину должно иметь ребро SA, чтобы множество $\{O_n\}$ состояло ровно из двух различных точек?

Задача 9. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник размером $m \times n$ клеток, причём числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найдите все возможные значения m и n.

Задача 10. Решите неравенство

$$4(1 - \operatorname{tg} x)^{2004} + (1 + \operatorname{tg} x)^{2006} \geqslant 2^{2006}.$$

Ответы. 1. -19. **2.** Меньший корень уравнения больше. **3.** $\pm\sqrt{2\pi k}$, $-1 \pm \sqrt{1 + 2\pi n}$, $k, n = 0, 1, 2, \ldots$ **4.** 36, 8. **5.** 3/5. **6.** $[0; 4]$. **7.** $(-\infty; -2] \cup \cup \{-1/2\} \cup [0; 1/2] \cup \{2\}$. **8.** $2, 2\sqrt{3}$. **9.** $(2; 117), (3; 59)$. **10.** $x \in [\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k] \cup \cup [-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n]$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

ВАРИАНТ 2006 (май), «Ломоносов–2006», 2.

Задача 1. Вычислите

$$\log_2 \log_8 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{64}}}}_{39}.$$

Задача 2. Что больше: $\operatorname{ctg}(17\pi/6)$ или меньший корень квадратного трёхчлена $7x^2 - 13x - 43$?

Задача 3. Решите уравнение

$$\sin(x^2 + x) + \sin(x + 2\pi/3) + \sin(x + 4\pi/3) = 0.$$

Задача 4. Точки K, L и M лежат на одной прямой. Отрезок KL является диаметром первой окружности, а отрезок LM — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку K, пересекает первую окружность в точке N и касается второй окружности в точке S. Известно, что $LN = 8$, $NS = 4$. Найдите радиусы окружностей.

Задача 5. Из пункта A в пункт B в 7^{00} вышел пешеход, а через некоторое время из B в A выехал всадник. Пешеход пришёл в B через 12 часов после выезда оттуда всадника. Всадник приехал в A в 16^{00} того же дня. Скорости пешехода и всадника постоянны. Какую долю пути из A в B прошёл пешеход до его встречи со всадником?

Задача 6. Решите неравенство $\sqrt{x+1} - 1 \leqslant -x|x-2| - 4x$.

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos 2x + 2a\cos x + |2a+1| - 2 = 0$$

имеет решения и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

Задача 8. В треугольной пирамиде $KLMN$ ребро KN перпендикулярно плоскости LMN, $\angle KLM = 90^\circ$, $NL = \sqrt{6}$, $ML = 3$. Последовательность точек O_n строится следующим образом: точка O_1 — центр сферы, описанной около пирамиды $KLMN$, и для каждого натурального $n \geqslant 2$ точка O_n — это центр сферы, описанной около пирамиды $O_{n-1}LMN$. Какую длину должно иметь ребро KN, чтобы множество $\{O_n\}$ состояло ровно из двух различных точек?

Задача 9. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник размером $m \times n$ клеток, причём числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 124 его клеток. Найдите все возможные значения m и n.

Задача 10. Решите неравенство

$$(1 - \operatorname{ctg} x)^{2006} + 4(1 + \operatorname{ctg} x)^{2004} \leqslant 2^{2006}.$$

Ответы. **1.** -38. **2.** Меньший корень трёхчлена больше. **3.** $\pm\sqrt{2\pi k}$, $-1 \pm \sqrt{1+\pi+2\pi n}$, $k, n = 0, 1, 2, \ldots$ **4.** $20/3$, 5. **5.** $3/7$. **6.** $[-1; 0]$. **7.** $\{-2\} \cup \cup [-1/2; 0] \cup \{1/2\} \cup [2; +\infty)$. **8.** $\sqrt{5}$, $\sqrt{15}$. **9.** $(2; 125)$, $(5; 32)$. **10.** $x \in [\pi/4 + \pi k; 3\pi/4 + \pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$.